Chapitre n°5 : Moment cinétique

En comparant le mouvement de translation et de rotation, nous pouvons dresser la liste de correspondance suivante quant aux variables utilisées :

Grandeurs	Translation	Rotation
Position ⇨ angle	x	θ
Vitesse linéaire ⇨ Vitesse angulaire	v	ω
Acc. linéaire ⇨ Acc. angulaire	a	α
Masse ⇨ Moment d'inertie	m	I
Force ⇨Moment de force	F	M
E_{cin} de translation ⇨ E_{cin} de rotation	$\frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{2}I\omega^2$
Puissance	$F \cdot v$	$M \cdot \omega$
Quantité de mouv. ⇨ Moment cinétique	$\vec{p}$	$\vec{L}$

L'analogue de la quantité de mouvement $\vec{p}$ (*momentum* en anglais) en rotation porte le nom de moment cinétique $\vec{L}$ (*angular momentum* en anglais). Par nos règles de traduction, le moment cinétique d'un objet de moment d'inertie I animé d'une vitesse angulaire ω est égal à (forme scalaire et non vectorielle) :

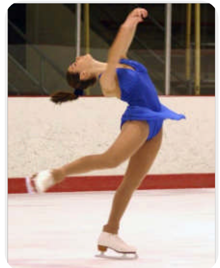
$$L = I\,\omega \qquad [kg \cdot m^2 / s] \qquad (1)$$

Le signe de L est celui de ω.

Nous avions précédemment énoncé le principe de conservation de la quantité de mouvement : « si la force extérieure résultante sur un système est nulle (système isolé), la quantité de mouvement totale du système est constante ». Si l'on traduit cela en rotation, on obtient *le principe de conservation du moment cinétique* :

Si le moment de force M extérieur total sur un système est nul (système isolé), le moment cinétique total est constant :

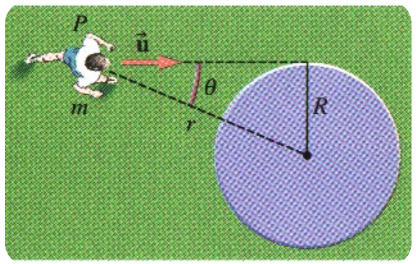
$$\text{Si } M = 0 \text{, alors } L = \text{constante} \qquad (2)$$



Par exemple, en patinage artistique, lorsqu'une patineuse tournant sur elle-même rapproche ses bras ou ses jambes de son axe de rotation, elle diminue le moment d'inertie de son corps ; pour que son moment cinétique L = I ω demeure constant, sa vitesse angulaire ω doit augmenter. Par contre, son énergie cinétique ne demeure pas constante ; elle augmente : le travail effectué par les muscles de la patineuse lorsqu'elle replie ses bras transforme une partie de ses réserves d'énergie potentielle chimique en énergie cinétique !
En résumé, lorsque la patineuse ramène ses membres près de l'axe de rotation, aucun moment de force extérieur n'agit sur elle. Ainsi, le moment cinétique est conservé.

Il nous reste à trouver *l'expression vectorielle* du moment cinétique
Considérons l'exemple suivant.

Un homme de masse m court le long d'une tangente à une plate-forme circulaire de rayon R à une vitesse constante $\vec{v}$ et saute sur le bord de la plate-forme. La plate-forme est libre de tourner autour d'un axe fixé au sol. Comme l'axe de la plate-forme exerce une force <u>extérieure</u> sur la plate-forme, on ne peut pas appliquer le principe de conservation de la quantité de mouvement. En revanche, l'axe



n'exerce aucun moment de force extérieur sur le système (puisque la force agit sur l'axe de rotation), et le moment cinétique est donc conservé.
Pour analyser un tel problème, il faut donc décrire le mouvement de translation de l'homme en fonction du moment cinétique. Nous allons considérer le moment où l'homme saute sur la plate-forme. Si on assimile l'homme à une particule, son moment d'inertie par rapport à l'axe est $I = mR^2$ et sa vitesse angulaire est $\omega = v/R$. Son moment cinétique vaut donc :

$$L = I\,\omega = mvR \qquad (3)$$

Comme L est conservé, cette valeur de L est valable en n'importe quel point de son mouvement de translation, pas seulement au moment où il saute sur la plate-forme. Ainsi, on peut dire qu'au début de sa course, l'homme avait un moment cinétique

$$L = mv\,R = mv\,r\sin\theta \qquad (4)$$

or

$$p = mv \qquad (5)$$

donc

$$L = r\,p\sin\theta \qquad (6)$$

où

r = distance entre l'homme et l'axe de rotation
θ = angle entre r et la vitesse $\vec{v}$ de l'homme.

Il s'agit donc d'une expression qui suggère un produit vectoriel.

Définition : moment cinétique

Le moment cinétique $\vec{L}$ d'une particule est le produit vectoriel de son vecteur position par sa quantité de mouvement :

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \qquad (7)$$

Pour connaître la direction du vecteur $\vec{L}$, il suffit d'appliquer la règle de la main droite.
Précisons qu'on mesure le moment cinétique toujours par rapport à un point, qui est l'origine du vecteur position $\vec{r}$.

Il est souvent commode d'exprimer le module de $\vec{L}$ en fonction du « bras de levier » $r_\perp = r\sin\theta$, qui est la plus courte distance entre l'origine et la droite sur laquelle se déplace la particule.

Mais alors y a-t-il un lien entre les expressions (7) et (1) ? Oui, et nous allons le voir dans l'exemple suivant.

Exemple

Considérons la plateforme de la page précédente constituée de particules ponctuelles. Chaque particule possède un moment cinétique et leurs moments cinétiques sont tous dirigés $\perp$ au plan de l'objet car l'axe de rotation est $\perp$ à l'objet. Ils sont donc tous // entre eux et ils peuvent donc être sommés.
Comme $\vec{r}$ et $\vec{v}$ sont $\perp$, par propriété du produit vectoriel, nous pouvons écrire :

$$L_0 = \sum r\,mv \qquad (8)$$

Or

$$v = \omega r \qquad (9)$$

Donc

$$L_0 = (\sum mr^2)\,\omega \qquad (10)$$

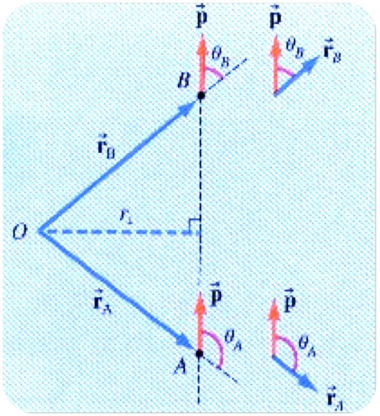
Ainsi

$$L_0 = I_0\,\omega \qquad (11)$$

Nous allons à présent traiter 2 cas : le mouvement rectiligne d'une particule, le mouvement circulaire d'une particule et d'un système de particules.

Mouvement rectiligne

Il est à remarquer qu'une particule en mouvement rectiligne possède un moment cinétique par rapport à toute origine qui n'est pas située sur la trajectoire.



Le moment cinétique aux 2 points A et B est un vecteur qui sort de la page.
Son module en ces points est $L_A = r_A\, p \sin\theta_A$ et $L_B = r_B\, p \sin\theta_B$.
On peut observer sur la figure ci-dessus que :

$$r_A \sin\theta_A = r_B \sin\theta_B = r_\perp$$

L'aspect angulaire du mouvement rectiligne est lié à la rotation du vecteur position autour de l'origine.
Si $\vec{v}$ est constant, alors $\vec{L}$ est conservé.

Exemple

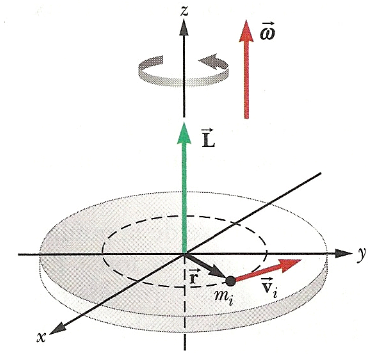
Quel est le module de $\vec{L}$ d'une particule de masse m = 0,5 kg, située en (0 m ; 2 m) dont la vitesse a pour module v = 10 m/s et est orientée dans la direction 37° nord par rapport à l'est ?

Mouvement circulaire

Soit une particule décrivant un cercle de rayon R à une vitesse de module constant v et avec une vitesse angulaire $\vec{\omega}$. Nous plaçons l'origine au centre du cercle. L'angle entre $\vec{r}$ et $\vec{p}$ est toujours de 90°, de sorte que :

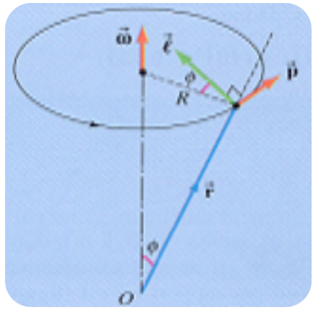
$$L = r\,p = mv\,R = mR^2\,\omega \qquad (12)$$

Lorsqu'un corps rigide est en rotation autour d'un axe, le moment cinétique $\vec{L}$ est orienté dans la même direction que celle du vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$, selon l'expression $\vec{L} = I\vec{\omega}$.



Les vecteurs $\vec{L}$ et $\vec{\omega}$ sont //.

Considérons le cas où l'origine O n'est pas située au centre du cercle. $\vec{\omega}$ est encore ⊥ au plan du cercle, dont le rayon est égal à R. Dans ce cas, le vecteur position $\vec{r}$ n'est pas orienté selon un rayon et le produit vectoriel $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ n'est pas ⊥ au plan du cercle, ce qui signifie que $\vec{L}$ et $\vec{\omega}$ ne sont pas //.



En revanche, la composante z du vecteur $\vec{L}$ est bien orientée selon $\vec{\omega}$. Comme $\vec{r}$ est ⊥ à $\vec{p}$, le module de L est L = mvr et sa composante selon z est :

$$L_z = L \cdot \sin\phi = (mvr)(R/r) = mR^2\omega \qquad (13)$$

Systèmes de particules

Le moment cinétique total $\vec{L}$ d'un système de particules par rapport à une origine donnée est la somme des moments cinétiques des particules. D'après (7),

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i = \sum(\vec{r}_i \times \vec{p}_i) \qquad (14)$$

On peut choisir l'origine en tout point de l'axe de rotation, que nous prenons comme axe des z. Selon (13), la composante selon z de la i^{ème} particule est :

$$L_{iz} = L_i \, . \sin\phi = (m_i v_i r_i)(R_i/r_i). = m_i R_i^2 \omega \qquad (15)$$

où

R_i = rayon de la trajectoire circulaire

La composante selon z du moment cinétique total d'un corps rigide tournant autour d'un axe fixe qui est également un axe de symétrie de l'objet est donc :

$$L_z = \sum L_{iz} = \sum m_i R_i^2 \omega \qquad (16)$$

or

$$I = \sum m_i R_i^2 \qquad (17)$$

Donc

$$L_z = I\,\omega \qquad (18)$$

La dynamique de rotation

Nous avons vu que les expressions du moment de force et du moment cinétique pour la rotation sont analogues aux expressions de la force et de la quantité de mouvement obtenues dans le cas de la translation.
Comme :

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad (19)$$

nous pouvons facilement deviner la relation existant entre $\vec{M}$ et $\vec{L}$:

$$\sum \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \text{(Théorème du moment cinétique)} \qquad (20)$$

Le moment de force agissant sur une particule est égal à la dérivée par rapport au temps de son moment cinétique. Il s'agit de la 2ème loi de Newton sous forme rotationnelle.

<u>Développement :</u>

Pour utiliser cette équation, il faut que les moments de force et le moment cinétique soient définis par rapport à la même origine O.

La loi de conservation du moment cinétique

De l'équation précédente, nous pouvons en déduire la loi de conservation du moment cinétique :

$$\boxed{\text{Si } \vec{M}_{ext} = \vec{0}, \text{ alors } \vec{L} = \text{constante} \qquad (21)}$$

Cette loi est valide tant pour un mouvement de rotation autour d'un axe fixe que pour un mouvement de rotation autour d'un axe passant par le centre de masse d'un système en mouvement, à condition que la direction de cet axe demeure fixe.
Si le moment de force extérieur résultant sur un système est nul, le moment cinétique total est constant en module et en direction.
Ce principe de conservation est dû à l'isotropie de l'espace. En effet, le moment cinétique est invariant par rapport à une rotation (la physique reste la même dans toutes les directions).

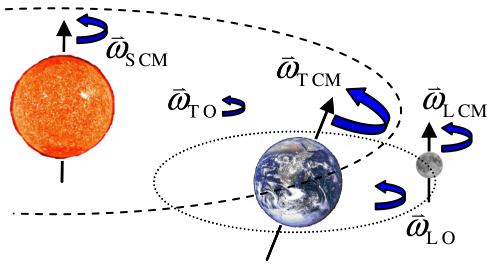
Cette loi représente une 3ème version du modèle du **système isolé**. Nous pouvons à présent affirmer que l'énergie, la quantité de mouvement et le moment cinétique d'un système isolé sont tous constants :

- $E_i = E_f$ s'il n'y a aucun transfert d'énergie au-delà de la frontière du système
- $\vec{p}_i = \vec{p}_f$ s'il n'y a aucune force extérieure résultante qui agit sur le système
- $\vec{L}_i = \vec{L}_f$ s'il n'y a aucun moment de force extérieur résultant qui agit sur le système

Applications

1.- Les particules élémentaires possèdent également un moment cinétique intrinsèque, appelé spin, qui est d'ailleurs quantifié (mécanique quantique).

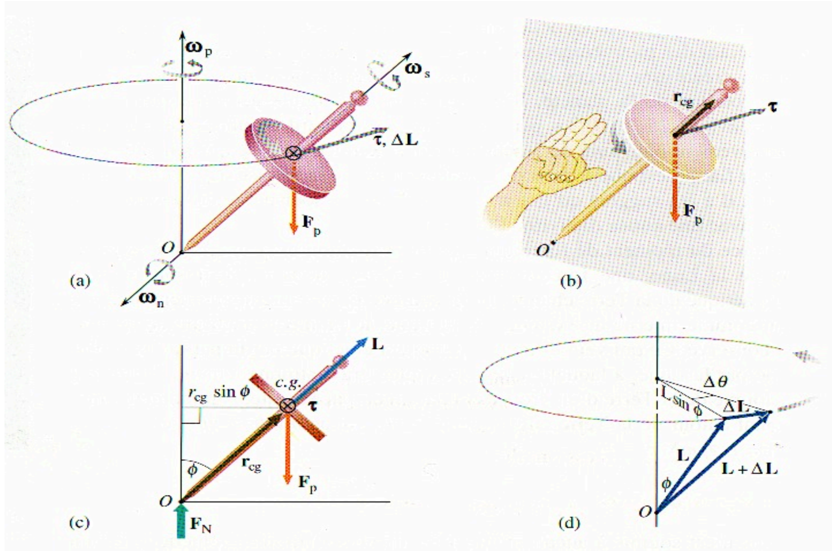
2.- La terre est animée de 2 mouvements de rotation distincts.



Système Soleil-Terre-Lune

Elle est en orbite autour du Soleil et elle tourne sur elle-même autour d'un axe interne passant pas son CM. Nous les appelons respectivement mouvement cinétique orbital $\vec{L}_0 = I\vec{\omega}_0$ et mouvement cinétique de spin $\vec{L}_{CM} = I\vec{\omega}_{CM}$.

3.- **Le gyroscope et la fréquence de précession**



Le poids appliqué au centre de gravité c.g de la masse supplémentaire agit vers le bas produisant de ce fait un moment de force $\overrightarrow{M}$ ($\vec{\tau}$ dans la partie (b) de la figure 1 ci-dessous). Ce moment de force produit une variation du moment cinétique selon le théorème du moment cinétique, variation qui est orientée perpendiculairement au vecteur $\vec{r}_{cg}$ et dans le plan horizontal créant de ce fait une précession (dans la partie (d), le vecteur $\overrightarrow{\Delta L}$ est colinéaire avec le vecteur moment de force $\vec{\tau}$) !

$$\sum \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Le moment cinétique L causé par la rotation du disque sur lui-même est donné par (partie (a)) :

$$\vec{L} = I\vec{\omega}_s \qquad (22)$$

Le moment de force vaut (partie (b)) :

$$\vec{M} = \vec{r}_{cg} \times m\vec{g} = \frac{\overrightarrow{\Delta L}}{\Delta t}$$

dont la norme vaut : $M = r_{cg} \cdot mg \cdot \sin\phi$ (23)

La variation de moment cinétique en raison du moment de force est donnée par l'expression suivante (partie (d)) :

$$\Delta L = L\sin\phi \cdot \Delta\theta$$

Ainsi

$$\Delta\theta = \frac{\Delta L}{L\sin\phi} \qquad (24)$$

et la vitesse angulaire de précession ω_P est donnée par :

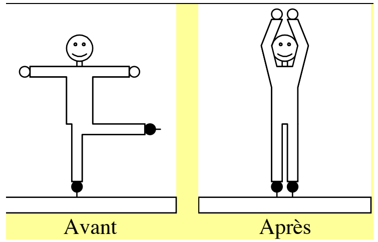
$$\omega_p = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \overset{(24)}{=} \frac{\frac{\Delta L}{L\sin\phi}}{\Delta t} = \frac{\Delta L}{L\sin\phi \cdot \Delta t} \overset{(22)}{=} \frac{\Delta L}{I\omega_S \sin\phi \cdot \Delta t} \overset{(23)}{=} \frac{r_{cg} \cdot mg \cdot \sin\phi}{I\omega_S \sin\phi} = \frac{r_{cg} \cdot mg}{I\omega_S} = \frac{r_{cg} \cdot mg}{\frac{1}{2}mr^2 \cdot \omega_S}$$

En sachant que $\omega = 2\pi f$, nous obtenons finalement :

$$f_p = \frac{r_{cg} \cdot mg}{4\pi^2 \cdot \frac{1}{2}mr^2 \cdot f_S}$$

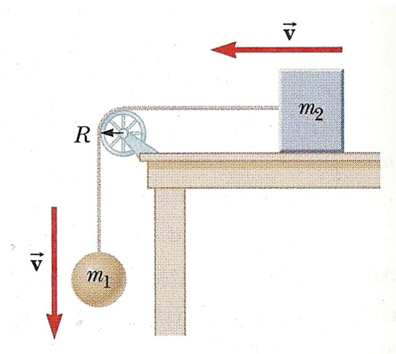
Série d'exercices

1.- Un patineur tourne sur lui-même avec une de ses jambes et ses deux bras perpendiculaires à son corps : sa vitesse angulaire est de 8 rad/s et son moment d'inertie est de 3,6 kg·m^2. En ramenant sa jambe à la verticale et en levant ses bras au-dessus de sa tête, il diminue son moment d'inertie à 1,6 kg · m^2 et sa vitesse angulaire augmente pour atteindre 18 rad/s. On désire analyser cette manœuvre à l'aide du principe de conservation du moment cinétique et du principe de conservation de l'énergie.

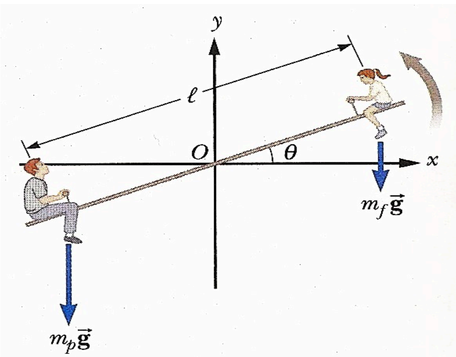


2.- Dans un parc pour enfants, un enfant de 30 kg court à 4 m/s vers un tourniquet immobile et saute tangentiellement sur le rebord. On assimile l'enfant à une particule et le tourniquet à un disque homogène de 3 m de rayon dont la masse est de 150 kg.
a) Quelle est l'énergie cinétique initiale de l'enfant ?
b) Quelle est la vitesse angulaire finale du tourniquet ?
c) Quelle est l'énergie cinétique finale du système composé du tourniquet et de l'enfant ?
Il se déplace vers le centre du tourniquet et se met debout en plein centre.
d) Quelle est la nouvelle vitesse angulaire du système ?
e) Quelle est désormais l'énergie cinétique du système ?
f) D'où provient la différence entre les énergies cinétiques trouvées en c) et en e) ?

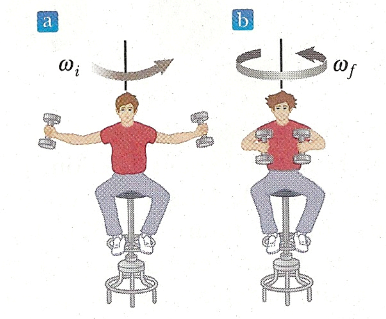
3.- Une sphère de masse m_1 et un bloc de masse m_2 sont reliés à l'aide d'une corde légère passant par une poulie, comme le montre la figure. Le rayon de la poulie est R, et la masse de la jante mince est M. Les rayons de la poulie sont de masse négligeable. Le bloc glisse sur une surface horizontale sans friction. A l'aide des concepts de moment cinétique et de moment de force, trouver une expression pour déterminer l'accélération linéaire des deux objets.



4.- Un père de masse m_p et sa fille de masse m_f sont assis aux extrémités opposées d'une balançoire à bascule, à égale distance du pivot situé au centre. La balançoire est modélisée comme une tige rigide de masse M et de longueur l, et elle pivote sans friction. A un moment donné, l'ensemble est en rotation dans un plan vertical à une vitesse angulaire ω.
a) Trouver une expression pour déterminer le module du moment cinétique du système
b) Trouver une expression pour déterminer le module de l'accélération angulaire α du système lorsque la balançoire forme un angle θ par rapport à l'horizontale.

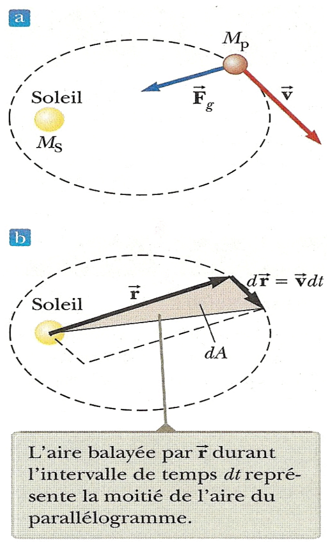


5.- Un étudiant est assis sur un tabouret en rotation libre et tient deux petits haltères ayant chacun une masse de 3 kg. Lorsque ses bras sont étendus à l'horizontale, les haltères sont situés à 1 m de l'axe de rotation, et l'étudiant est en rotation à une vitesse angulaire de 0,75 rad/s. Le moment d'inertie de l'étudiant et du tabouret ensemble est de 3 kg·m^2, et on suppose qu'il est constant. L'étudiant ramène les haltères vers lui à l'horizontale, où ils se trouvent alors à 0,3 m de l'axe de rotation.
a) Quelle est la nouvelle vitesse angulaire de l'étudiant ?
b)Déterminer l'énergie cinétique du système en rotation avant que l'étudiant ramène les haltères vers lui et après qu'il les a ramenés vers lui.

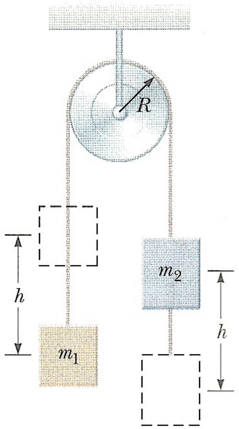


6.- Un disque de masse M et de rayon R tourne avec une vitesse angulaire ω autour d'un axe perpendiculaire à son plan et situé à une distance R/2 du centre.
Quel est le module de son moment cinétique ?

7.- Selon la 2ème loi de Kepler relative au mouvement planétaire, la droite joignant le Soleil et une planète balaie des aires égales pendant des intervalles de temps égaux.
Montrer que ce phénomène est une conséquence de la conservation du moment cinétique. La trajectoire d'une planète est une ellipse.

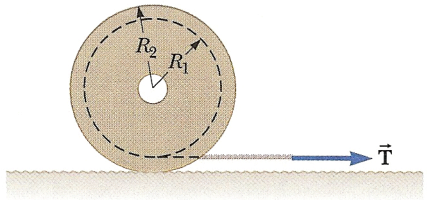


8.- 2 blocs de masse $m_1 = 3$ kg et $m_2 = 5$ kg sont reliés par une ficelle passant sur une poulie de rayon R = 8 cm et de masse M = 4 kg. On néglige les frottements et on assimile la poulie à un disque. On place l'origine au centre de la poulie.
a) Quel est le module du moment de force résultant sur le système ?
b) Quel est le module du moment cinétique du système lorsque les blocs ont une vitesse de module v ?
c) Déterminer le module de l'accélération des blocs en appliquant l'équation $\sum \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$



9.- Un cycliste vire à gauche en roulant à vitesse constante de module v sur une trajectoire circulaire de rayon r. On suppose que la roue arrière de rayon R et de moment d'inertie I reste verticale.
a.- Quelle est la direction du moment cinétique ?
b.- Montrez que dL/dt = 2K, où K est l'énergie cinétique de rotation de la roue.

10.- On tire avec une force $\vec{T}$ sur un fil enroulé sur le moyeu d'un cylindre de moment d'inertie I.



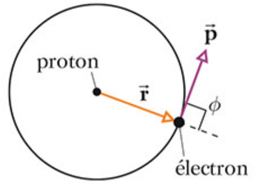
Rayon du cylindre = R_2 ; rayon du moyeu = R_1 ; masse totale = M

Calculer l'accélération du centre de masse a_{cm} et déterminer dans quel sens va rouler le cylindre

11.- Une étoile est en rotation autour d'un axe passant par son centre, et sa période de rotation est de 30 jours. La période est l'intervalle de temps requis pour qu'un point situé à l'équateur de l'étoile effectue une rotation complète autour de l'axe de rotation. Après l'explosion de l'étoile et sa transformation en supernova, son noyau, qui avait un rayon de $1 \cdot 10^4$ km, s'effondre sur lui-même et devient une étoile à neutrons, dont le rayon est de 3 km. Déterminer la période de rotation de cette étoile à neutrons.

12.- La comète de Halley est en mouvement autour du Soleil sur une orbite elliptique. Son périhélie (point où elle se trouve le plus proche du Soleil) est à 0,59 UA du Soleil et son aphélie (point où elle se trouve le plus éloignée du Soleil) est à 35,3 UA (1 UA = distance Terre-Soleil) du Soleil. Le moment cinétique de la comète par rapport au Soleil est constant, et la force gravitationnelle qu'exerce le Soleil a un bras de levier nul. La vitesse de la comète à son périhélie est de 54,5 km/s.
Quelle est sa vitesse à son aphélie ?

13.- Dans la théorie de Bohr pour l'atome d'hydrogène, un électron de masse m et de charge –e est en orbite autour d'un proton immobile de charge +e. La force centripète, dont l'origine est électrique, a pour module $F = ke^2/r^2$, k étant une constante et r étant le rayon de l'orbite.



En outre, le moment cinétique est quantifié ; son module prend uniquement des valeurs discrètes données par mvr = nh/2π où h est la constante de Planck et n un nombre entier positif. A l'aide de ce qui précède, montrez que le n[ième] rayon possible est :

$$r_n = \frac{(nh/2\pi)^2}{mke^2}$$