Chapitre n°10 : Relativité

« La chose la plus incompréhensible, c'est que l'univers soit compréhensible »
Albert Einstein

La théorie de la relativité d'Einstein traite de la façon dont nous observons différents événements en particulier de la façon dont nous décrivons les événements et le mouvement des corps dans différents systèmes de référence (ensemble d'axes de coordonnées fixées à un corps tel la Terre, la Lune, un train, etc…).
Durant l'étude de cette branche de la physique, nous allons nous rendre compte que cette théorie est en fait une « théorie des invariants » : en permettant à chaque observateur de prendre conscience de la perspective sous laquelle il observe et décrit le monde, elle l'invite à en chercher une représentation universelle.
Outre l'intervalle spatio-temporel dont nous reparlerons, d'autres grandeurs ont le statut « d'invariant relativiste », c'est-à-dire de grandeurs qui restent identiques pour tous les observateurs galiléens. Citons à titre d'exemple, l'entropie, grandeur essentielle en thermodynamique, et l'action, fondamentale en théorie quantique sans oublier la vitesse de la lumière dans le vide, et l'invariant $E^2 - c^2 B^2$ en électromagnétisme.

Le référentiel absolu de Newton

Les suppositions sur lesquelles repose la relativité newtonienne ou galiléenne sont indémontrables. Elles tirent leur sens de notre expérience quotidienne. Ainsi, on tient d'ordinaire pour acquis que les longueurs des corps, de même que la vitesse à laquelle le temps s'écoule, ne varient pas selon le système de référence choisi. En mécanique classique, l'espace et le temps sont considérés absolus : leurs mesures ne changent pas d'un système de référence à un autre ; on suppose aussi que ni la masse d'un corps, ni aucune force ne varie en conséquence d'un changement de système de référence inertiel. En mécanique classique, l'accélération d'un corps est la même dans tous les systèmes de référence inertiels. Cette invariance est due à l'invariance du changement de vitesse et du temps d'un système inertiel à un autre.

Comme ni $\vec{F}$, ni $\vec{a}$ ne varient dans le système de référence inertiel, la seconde loi de Newton, $\vec{F} = m\vec{a}$, est toujours vérifiée, conformément au principe de relativité de Galilée. On peut montrer que les autres lois de la mécanique obéissent également au principe de la relativité.

L'invariance des lois de la mécanique par rapport aux différents référentiels suppose qu'aucun système de référence inertiel n'est spécial en un sens quelconque.
Tous les systèmes inertiels sont équivalents pour décrire les phénomènes mécaniques.
Il est tout à fait équivalent de dire qu'une personne voyageant à vitesse constante en automobile ou en avion est au repos et que c'est la Terre qui bouge que de dire l'inverse, car aucune expérience ne permet de décider quel système de référence est « réellement » au repos et lequel est « réellement » en mouvement. Il n'existe donc aucune manière de déterminer un système de référence particulier qui soit *absolument* au repos.

Le principe de relativité de Galilée

A ce propos, selon Galilée, un système de référence est dit inertiel si la 1ère loi de Newton, ou loi d'inertie, y est vérifiée, c'est-à-dire si un corps quelconque sur lequel d'autres corps n'exercent aucune force nette y demeure au repos ou dans le même état de mouvement rectiligne à vitesse constante. Les systèmes de référence en accélération, notamment en rotation, ne sont pas inertiels. De même, la Terre n'est pas tout à fait un système inertiel puisqu'elle est en rotation.
Le principe de relativité, soit le fait que les lois fondamentales de la physique sont identiques dans tous les systèmes de référence inertiels, n'avait nullement échappé à Galilée et à Newton.
Sans doute avez-vous vous-même perçu la validité de ce principe dans la vie de tous les jours : les corps bougent de la même manière dans un train roulant à vitesse constante, un avion que sur la Terre ferme.
En effet, imaginons que vous rouliez dans une automobile à vitesse constante et que vous laissiez tomber, à l'intérieur de la voiture, une pièce de monnaie depuis le sommet de votre tête. La pièce tombera selon une trajectoire rectiligne et frappera le plancher directement en dessous de son point de chute : notre expérience est donc en accord avec le principe de relativité (expérience de Galilée) (Expérience de Galilée-Einstein).
Cependant, il convient de noter que, pour un observateur au sol, la trajectoire de la pièce sera parabolique. En fait, dans le référentiel terrestre, la pièce a une vitesse initiale et les lois de la physique prévoient donc que la trajectoire de la pièce soit parabolique.
Dans le référentiel de la voiture, la vitesse initiale est nulle et il s'agit d'une chute libre.

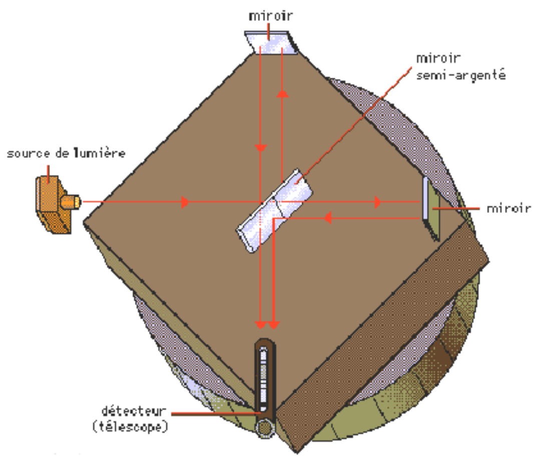
La notion d'éther et l'expérience de Michelson-Morley

Selon la théorie de l'électromagnétisme de Maxwell, laquelle expliquait de nombreux phénomènes, la lumière devait désormais être considérée comme une onde électromagnétique (dualité onde-corpuscule). Les équations de Maxwell permettaient de calculer que la vitesse de la lumière c était de 300'000 km/s ; compte tenu de l'erreur expérimentale, cette valeur est identique à la vitesse mesurée. Il s'en suivait donc la question suivante : dans quel système de référence la vitesse de la lumière est-elle exactement égale à celle prédite par la théorie de Maxwell ? On tenait en effet pour acquis que la vitesse de la lumière variait d'un référentiel à l'autre. On croyait, par exemple, selon la mécanique newtonienne, que des observateurs voyageant à une vitesse de 10^8 m/s, vers une source de lumière mesureraient une vitesse de la lumière parvenant jusqu'à eux de $4 \cdot 10^8$ m/s. Mais les équations de Maxwell ne permettaient pas d'introduire de vitesse relative. Elles prédisaient seulement que la vitesse de la lumière était de $c = 3.10^8$ m/s, ce qui semblait indiquer qu'il existait un *référentiel spécial* dans lequel la vitesse de la lumière serait toujours égale à 3.10^8 m/s

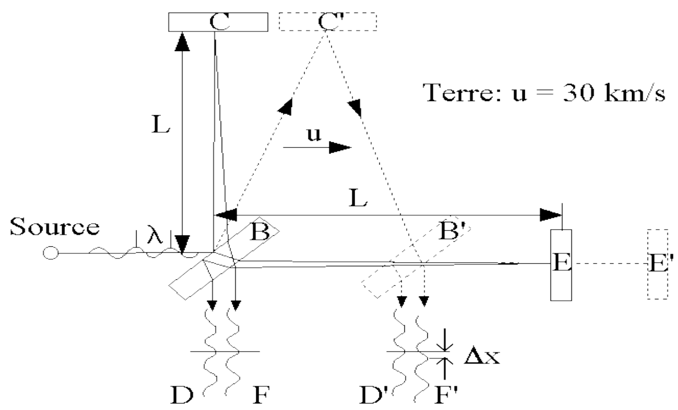
Développement (équations de Maxwell, exemple) :

Nous avons vu précédemment que les ondes peuvent se propager notamment dans l'eau ou sur des cordes et des ressorts, et que les ondes sonores se propagent dans l'air et dans d'autres milieux matériels. Les physiciens du XIXème siècle pensaient que le monde matériel obéissait aux lois de la mécanique ; ils supposaient donc naturellement que la lumière se propageait elle aussi dans un milieu particulier, qu'ils surnommèrent éther. Ce milieu transparent était supposé remplir l'espace tout entier. Les physiciens pensaient donc que la vitesse de la lumière calculée à l'aide des équations de Maxwell était celle de la lumière dans l'éther.
Les scientifiques tentèrent de déterminer la vitesse de la Terre relativement à ce référentiel absolu hypothétique.
Au XIXème siècle, la lumière était vue comme une vibration qui se propage et qui suppose donc l'existence d'un milieu qui vibre (l'air dans le cas du son, par exemple). Le problème est que la lumière se propage aussi dans le vide, là où a priori il n'y a rien qui peut vibrer... D'où l'hypothèse faite que le vide devait en fait être une substance immobile dont les vibrations seraient la lumière et que l'on appela très poétiquement *éther*.

En 1887, les Américains Michelson et Morley tentèrent de mettre en évidence l'effet de la vitesse de la Terre sur la vitesse de la lumière.
Comme la Terre est en mouvement par rapport à l'éther puisqu'elle tourne autour du Soleil, le temps du trajet d'aller-retour de la lumière doit être différent selon que ce trajet est dans la direction du mouvement de la planète ou dans la direction de la perpendiculaire.



Pour voir cela, Michelson conçut un instrument suffisamment précis pour mesurer une variation possible de l'ordre de $(u/c)^2$ où c est la vitesse de la lumière dans le vide.
Il espérait bien que son interféromètre détecte un vent d'éther transportant l'onde lumineuse.



Voici le dispositif employé en 1881 par Michelson et repris en 1887 avec la collaboration de Morley, pour mettre en évidence la vitesse de translation $\vec{u}$ de la terre dans l'éther:

Un rayon lumineux issu d'une source monochromatique très pure atteint une plaque de verre semi-argentée B qu'il traverse en partie jusqu'à un miroir E, tandis que la partie réfléchie atteint un miroir C placé dans une direction perpendiculaire à BE. Après avoir atteint les miroirs C et E, les rayons se réfléchissent à nouveau sur B, où ils doivent interférer.

Résultat attendu

Le rayon lumineux voyage dans la même direction que le mouvement supposé de la Terre. Si la transformation de Galilée est correcte, le rayon lumineux voyagera donc à la vitesse (c-u), et ayant à parcourir une distance $L_{//}$ mettra un temps :

Lors du trajet retour EB, ce même rayon voyageant dans une direction opposée au mouvement de la terre, aura une vitesse (c+u) et mettra un temps :

Le temps total $t_{//}$ sera donc :

$t_{//}$ =

Pour le trajet dans la direction perpendiculaire, il faut tenir compte du fait que le miroir initialement en C s'est déplacé en C' avant de réfléchir le rayon lumineux. Si on décompose le triangle isocèle BC'B' en deux triangles rectangles, on a clairement:

Si on fait le bilan, la différence de durée Δt vaut donc:

Δt =

et on doit donc s'attendre à observer un déphasage en DF.
Tournons le dispositif de 90°, de sorte que l'éther se déplace le long de $L_\perp$.
Notons les nouvelles quantités avec des « primes » et reprenons une analyse similaire à celle qui précède. La différence $\Delta t'$ vaut maintenant :

$\Delta t'$ =

Michelson cherchait un décalage de la figure d'interférence quand le dispositif était tourné de 90°. La différence de temps s'écrit :

$\Delta t - \Delta t'$ =

Données expérimentales et résultats :
u = vitesse supposée de la Terre par rapport à l'éther = $3 \cdot 10^4$ m/s
L = longueur effective d'un bras interférométrique correspondant à 8 allers-retours = 11 m
λ = longueur utilisée = $550 \cdot 10^{-9}$ m

La différence de temps vaut donc :

$\Delta t - \Delta t'$ =

La fréquence $\nu = c/\lambda$ =

La période T =

Conclusion :

Interprétation
Pour expliquer un tel fait expérimental, il y a 3 possibilités:

1.- soit u = 0 : La Terre est immobile par rapport à l'éther (l'éther colle à la Terre comme le ferait un fluide très visqueux. Ainsi emporté par son mouvement et à la même vitesse qu'elle, l'éther resterait immobile au niveau du sol expliquant ainsi les résultats obtenus. Cette interprétation soulevait une grave objection : même si l'entraînement de l'éther était total au niveau du sol, elle nécessitait d'admettre qu'il diminue avec l'altitude. Or, Michelson, qui l'avait lui-même proposée, avait montré qu'un entraînement de l'éther sur plusieurs kilomètres d'épaisseur était pour cela nécessaire. Cette conclusion exigeait de lui attribuer une viscosité si grande qu'un freinage progressif des planètes aurait dû être observé.

2.- soit $u \neq 0$: Lorentz et Fitzgerald envisageaient la possibilité d'une interaction entre la matière et l'éther en admettant le fait que l'éther avait

la propriété de contracter la longueur des corps dans la direction de leur mouvement de façon à annuler exactement l'effet cherché. Dans cette interprétation, la lumière se déplacerait effectivement moins rapidement (par rapport à la Terre) lorsque sa vitesse et celle de la Terre seraient parallèles et de même sens, mais on ne pourrait pas s'en apercevoir parce que le chemin qu'elle aurait à parcourir serait lui-même plus court. Le problème était que cette 2ème interprétation apparaissait totalement artificielle : avec elle, tous les corps, et donc tous les instruments de mesure et le mètre étalon lui-même, se trouvaient contractés de façon similaire de sorte qu'il devenait impossible de déceler la moindre contraction de quoi que ce soit. Cette interprétation revenait donc à résoudre la question d'un éther introuvable en postulant celle d'une contraction fantôme dont la propriété serait de ne jamais laisser de trace observable. Il est cependant instructif de calculer cette contraction des longueurs. Il faut bricoler L ou T pour « retomber sur ses pattes » :
Par exemple, si les objets, les distances raccourcissent ou les horloges ralentissent dans le sens du mouvement d'une quantité:

tout rentre dans l'ordre. Nous devons interpréter ce changement en postulant une **contraction des longueurs** ou une **dilatation du temps** pour l'observateur immobile par rapport à l'éther.

3.- Une troisième piste, d'autant plus séduisante que l'éther se présentait comme un milieu aux propriétés mécaniques contradictoires et incompréhensibles (faible densité, grande rigidité, grande viscosité), aurait été bien sûr de considérer que cet éther était introuvable … tout simplement parce qu'il n'existait pas. Mais cette piste- là, même 18 ans après la première expérience de Michelson, personne n'était encore prêt à l'accueillir. Finalement, Einstein interpréta cette expérience en postulant que la lumière se propage **à la même vitesse dans tout repère** !
Aussi étrange que cela puisse paraître au premier abord, les notions de temps et d'espace ne sont pas étrangères l'un à l'autre, et nous sommes plongés dans un espace à quatre dimensions (trois coordonnées d'espace et une temporelle). Cet aspect quadridimensionnel de notre univers, ne peut bien évidemment pas être mis en évidence dans notre vie de tous les jours, tout simplement parce que nous sommes incapables de nous déplacer à la vitesse d'un rayon lumineux (rappelez-vous que numériquement $c \sim 3\times10^{8}$ $m \cdot s^{-1}$). Dans notre monde quotidien, nous avons toujours $u \ll c$, nous rendant totalement aveugle au fait que les règles raccourcissent et que les montres ralentissent lors de tout déplacement. On remarquera aussi que lorsque $u = c$, $L = 0$, traduisant l'impossibilité physique de voyager plus vite que la lumière.
En résumé, la vitesse de la lumière dépend des propriétés fondamentales de l'espace et du temps. Le rythme de l'écoulement du temps et l'échelle des longueurs varient d'un observateur à l'autre, ce qui fait en sorte que la lumière se déplace toujours exactement à la même vitesse par rapport à tous les observateurs indépendamment du mouvement de ceux-ci ou de la source qui émet la lumière.

Les postulats d'Einstein

Dans son célèbre article de 1905, Einstein défendit la thèse qu'il fallait rejeter complètement l'idée d'éther et la supposition corollaire d'un système de référence au repos absolu. Cette thèse fut énoncée en 2 postulats. Le premier postulat étendait le principe de relativité newtonien non seulement aux lois de la mécanique mais aussi au reste de la physique, y compris l'électromagnétisme et l'optique : L'expérience de Galilée (objet lancé du sommet d'un mât d'un bateau) réalisée avec la lumière nous invite à étendre la notion de relativité aux phénomènes lumineux.

1er postulat : Le principe de relativité
Les lois de la physique ont la même forme dans tous les référentiels inertiels.

La classe des observateurs d'inertie remplace l'espace absolu de Newton.
Ce principe s'exprime également simplement en supprimant de l'énoncé du principe de relativité de Galilée, le mot « mécanique » :
« Dans un système physique animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme (M.R.U), on ne peut mettre en évidence le mouvement du système par aucune expérience ~~de mécanique~~ effectuée à l'intérieur de ce système ».

2ème postulat : Constance de la vitesse de la lumière
La lumière se propage dans le vide à une vitesse finale c indépendante de la vitesse de la source et de celle de l'observateur (à condition qu'il se déplace à vitesse constante).

Le 1er postulat généralise un résultat auquel tous les physiciens sont habitués depuis Galilée.
Le 2ème postulat (1ère partie) ne paraissait guère surprenant puisqu'il admet pour la lumière une propriété que l'on connaît déjà pour tous les types d'onde, à savoir que la vitesse d'une onde est indépendante du mouvement de sa source.
Ils n'ont donc rien de bien révolutionnaire et chacun pourrait certainement y souscrire les yeux fermés. Soyons cependant prudents : la révolution engendrée par la relativité restreinte ne provient ni du premier énoncé, ni du second, mais de leur association qui conduit à des résultats tout à fait inattendus.
Max Planck comparait la révolution einsteinienne à celle de Copernic : «De même que le basculement du géocentrisme vers l'héliocentrisme, la théorie de la relativité restreinte entraîne un renversement de perspective : la vitesse de la lumière s'y révèle invariante, alors qu'on la croyait jusqu'alors relative, tandis que c'est le temps, qui passait pour invariant, qui est en fait relatif ».
Ces 2 postulats fondent la théorie de la relativité restreinte d'Einstein. On l'appelle « restreinte » par opposition à sa théorie de la relativité générale, présentée en 1916, laquelle traite aussi des systèmes de référence non inertiels (en accélération) en incluant la gravitation.
L'élégance de la théorie d'Einstein est manifeste. En effet, si on relègue l'idée d'un système de référence absolu aux oubliettes, il devient possible d'éliminer la contradiction entre la théorie électromagnétique de Maxwell et la mécanique. La vitesse de la lumière prédite par les équations de Maxwell est la vitesse de la lumière dans le vide pour tout système de référence.

En fait, c'est un premier pas vers la ***théorie quantique***…
Pour en donner un premier exemple, revenons sur ces 2 « principes » à la lumière de ce que nous savons aujourd'hui de la théorie quantique :

- Le premier, qui généralise le principe de relativité, revient à dire que la lumière se comporte comme la pierre dans l'expérience de Galilée, c'est-à-dire comme une ***particule***. Notons que cette façon de considérer la lumière comme une particule est tout à fait compatible avec l'inexistence de l'éther : une particule peut en effet se déplacer dans le vide sans avoir besoin d'un support matériel.

- Le second principe, qui affirme que la vitesse de la lumière est indépendante du mouvement de sa source, affirme au contraire que la lumière se comporte comme une ***onde*** : contrairement à celle d'une particule, la vitesse d'une onde, en effet, ne dépend que de la vitesse du milieu qui la propage et en aucun cas de celle de la source. Ainsi, le son émis par une voiture ne nous arrive pas plus vite que le cri d'une personne immobile ; tous deux dépendent uniquement de la vitesse de leur milieu de propagation, et donc de la vitesse du vent.

Bien qu'apparemment anodins, l'ensemble des 2 principes posés par Einstein revient ainsi à suggérer l'idée que la lumière puisse être à la fois **« onde » et « particule »** (évoquant donc le concept de complémentarité quinze ans avant Niels Bohr). N'y a-t-il pas là un premier exemple de conséquence inattendue de la combinaison de 2 principes à priori évidents ?
Si l'on y réfléchit bien, ce résultat étonnant différencie clairement la lumière de tous les types d'ondes et de particules connus : la vitesse (par rapport à moi) des ondes et des particules que nous connaissons est toujours plus grande si je me déplace à leur encontre que si je m'en éloigne et dépend donc bien de mon état de mouvement. Précédemment, nous mentionnions le fait que la lumière pouvait être à la fois « onde » et « particule » ; dans ce nouveau contexte, ils nous inviteraient à penser qu'elle n'est « ni vraiment onde ni vraiment particule ».

Les transformations de Lorentz

But : trouver les transformations de coordonnées entre observateurs d'inertie
Historiquement, une première solution a été élaborée par Galilée :

$u_x = u_x^{'} + v \qquad u_y = u_y^{'} \qquad u_z = u_z^{'}$ Transformations de Galilée

où

u_x = composante de la vitesse suivant l'axe des x d'une particule dans le référentiel S (O,x,y,z)

$u_x^{'}$ = composante de la vitesse suivant l'axe des x' d'une particule dans le référentiel S'(O',x',y',z')

Développement : transformation de Galilée

Les transformations de Galilée ne sont valides que lorsque les vitesses en cause sont bien inférieures à c. Il est évident que la première équation de Galilée, $u_x = u_x^{'} + v$, ne peut être valide pour la vitesse de la lumière ; en effet, si la lumière voyage à la vitesse $u_x^{'}$ =c dans S', sa vitesse dans S doit être de c+v ; or, ceci est contraire à la théorie de la relativité qui affirme que cette vitesse doit être de c dans S. Supposons qu'une étincelle éclate en O superposé à O' à l'époque t = t' = 0. Le signal lumineux émis parviendra en un point P (x',0,0) de l'axe Ox' à l'époque t' telle que x' = c·t', pour un observateur lié à S'. Il atteindra le même point P (x,0,0) à l'époque t telle que x = c·t pour l'observateur lié à S. Si l'on maintient l'usage des formules de passage de Galilée (x = x' + v·t' et t = t') :

c·t = c·t' + vt' en contradiction avec t = t' !

La nécessité d'établir un nouvel ensemble d'équations de transformation pour les vitesses relativistes devient donc évidente.
Les transformations de Lorentz (désignant également le groupe de Lorentz), quant à elles, s'expriment de la façon suivante :

$$x_1^{'} = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad x_2' = x_2 \qquad x_3' = x_3 \qquad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Elles furent établies en 1904 par Lorentz pour expliquer le résultat nul de l'expérience de Michelson et Morley et pour donner aux équations de Maxwell (électromagnétisme) la même forme dans tous les référentiels inertiels (invariance par rapport au changement de référentiel). Un an plus tard, Einstein les obtenait **indépendamment** dans le cadre de sa théorie de la relativité. Remarquez que, comparativement à la transformation galiléenne, non seulement l'équation pour x est modifiée mais aussi l'équation pour t ; en fait, cette dernière équation nous permet de voir directement comment les coordonnées d'espace et de temps sont inter-reliées. L'espace et le temps se trouvent donc intimement liés.

Développement :

A partir des transformations de Lorentz, nous pouvons obtenir **les équations relativistes de transformation des vitesses** en dérivant les équations de transformations par rapport au temps :

$$u_x = \frac{u_x' + v}{1 + \frac{v u_x'}{c^2}} \quad u_y = \frac{u_y' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v u_x'}{c^2}} \quad u_z = \frac{u_z' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v u_x'}{c^2}}$$

Notons que même si la vitesse relative $\vec{v}$ est dans la direction des x, la transformation de toutes les composantes de la vitesse d'une particule est affectée par v et par u_x, la composante x de la vitesse de la particule, ce qui n'est pas le cas pour la transformation de Galilée.
Finalement, notons que ces équations prennent la forme classique (galiléenne) pour des vitesses petites devant celle de la lumière.

La dilatation du temps

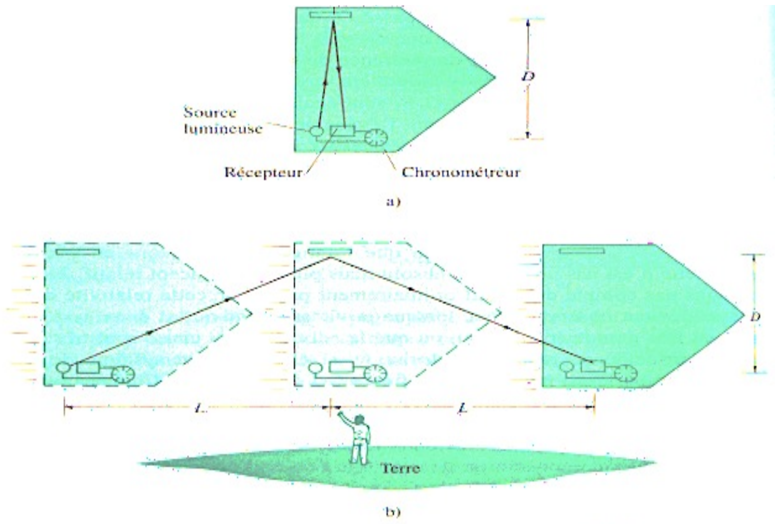
Le fait que 2 événements simultanés pour un observateur ne le sont pas nécessairement pour un autre conduit à penser que le temps lui-même n'est pas absolu.
Se pourrait-il que dans des référentiels différents, le temps s'écoule à des taux différents ? C'est exactement ce que la théorie de la relativité d'Einstein affirme. Einstein réalisa que les observateurs de chaque référentiel doivent être équipés de leur propre horloge et de leur propre règle. Un événement dans un référentiel donné doit être caractérisé à la fois par ses coordonnées d'espace et de temps.
La figure suivante représente un vaisseau spatial voyageant près de la Terre à grande vitesse.

La partie a) représente le point de vue d'un astronaute dans le vaisseau et la partie b), celle d'un observateur sur la Terre. Les 2 observateurs sont munis d'horloges exactes consistant en un faisceau de lumière se réfléchissant entre 2 miroirs et indiquant de fait une période T. L'astronaute projette un faisceau de lumière sur un miroir de l'autre côté du vaisseau et mesure le temps pris par la lumière pour faire l'aller-retour. Comme la lumière parcourt une distance de 2D à la vitesse c, cet intervalle de temps, que nous appellerons Δt_0, est :

$$\Delta t_0 = 2D/c$$

L'observateur terrestre observe le même aller-retour de la lumière. Cependant, pour lui, le vaisseau est animé d'une vitesse u. De ce fait, pour lui, la lumière doit parcourir le chemin diagonal illustré dans la figure. La vitesse de la lumière est bien la même pour les 2 observateurs, cependant elle parcourt une plus grande distance pour l'observateur terrestre. L'intervalle Δt est défini par :

Comment expliquer ce résultat sachant que nous avons admis avec Einstein, que la vitesse de la lumière est la même pour tous les observateurs quel que soit le mouvement de sa source et donc que l'astronaute et l'observateur terrestre la voient se déplacer à la même vitesse.



Autrement dit, comment la lumière peut-elle parcourir un chemin plus long si elle ne va pas plus vite ? Une seule réponse possible : si, vue de la Terre, la lumière parcourt une distance plus grande, tout en allant pourtant à la même vitesse, c'est que, vue de la Terre, *elle dispose de plus de temps*. L'expérience de Galilée, généralisée au cas de la lumière, nous introduit d'emblée au cœur de la relativité.
Une nouvelle conséquence de 2 résultats pris en compte par Einstein est donc la suivante : la durée d'un phénomène qui se déroule dans le vaisseau est plus grande lorsqu'elle est mesurée depuis la Terre que lorsqu'elle est mesurée dans le vaisseau.
Ainsi, dans cet exemple, les 2 événements : « la lumière est émise par la source » et « la lumière est reçue par le récepteur » sont séparés par un intervalle de temps plus grand dans le référentiel de la Terre que dans le référentiel de l'astronaute.

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Développement :

Bien que l'horloge du vaisseau et celle du bateau soient rigoureusement identiques, l'horloge qui se déplace par rapport à moi fonctionne moins vite que la mienne. En toute rigueur, on ne compare pas l'horloge du vaisseau à celle de la Terre mais à des horloges différentes, immobiles et synchronisées dans le référentiel de la Terre, devant laquelle passe le vaisseau. Cela pour éliminer d'éventuels effets supplémentaires dus au temps de propagation de la lumière du vaisseau jusqu'à la Terre.

Résultat important : c'est l'astronaute qui trouve la durée la plus courte.
Cette conséquence générale de la théorie de la relativité est connue sous le nom de **dilatation du temps**.

Enoncé : les horloges en mouvement avancent plus lentement que les horloges au repos.

N'en concluons pas que ce sont les horloges qui ne fonctionnent pas bien. D'après la mesure, le temps s'écoule plus lentement dans un système de référence en mouvement relativement au nôtre. Ce résultat étonnant découle directement des 2 postulats de la relativité.

L'équation de dilatation du temps n'est valide que lorsque Δt_0 représente l'intervalle de temps entre les 2 événements dans un référentiel où les 2 événements se produisent au même point de l'espace.
On appelle cet intervalle Δt_0, *le temps propre* : durée « la plus courte », lue sur la montre de l'observateur qui se trouve *immobile* par rapport au phénomène. Il s'agit donc d'une mesure où l'horloge est au repos. Toutes les autres durées mesurées par des observateurs qui regardent le vaisseau passer sont plus longues.
Ainsi suis-je contraint d'attribuer à chaque véhicule en mouvement un temps particulier, une « vitesse » particulière d'écoulement du temps. Plus le « véhicule » a une grande vitesse par rapport à moi, plus je vois son horloge ralentie par rapport à la mienne. L'histoire a donné à cet effet le nom de « dilatation des durées » ; sans doute aurait-il été plus clair de parler de « **ralentissement des horloges mobiles** ».
Il nous faut noter que cette « dilatation du temps » est très faible aux vitesses usuelles. En effet, il faut atteindre 85% de la vitesse de la lumière, soit 260'000 km/s pour dilater le temps d'un facteur 2. C'est ce qui explique que personne ne se soit jamais aperçu de son existence avant Einstein. Il ne faudrait pas en déduire que de tels effets sont toujours négligeables : le GPS, par exemple, ne fonctionnerait pas de façon précise s'il n'en tenait pas compte. Si un vaisseau spatial pouvait voyager à une vitesse avoisinant celle de la lumière pour rejoindre une étoile située à 100 années-lumière, il lui faudrait plus de 100 ans pour atteindre l'étoile. L'effet de dilatation du temps diminue énormément ce temps pour le voyageur. Dans un vaisseau voyageant à une vitesse v = 0,999c, le temps requis pour le voyage ne serait plus que de $\Delta t_0 = \Delta t \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 4{,}5$ années.

La dilatation du temps permet un tel voyage.
Tandis qu'il s'écoulerait 100 ans sur Terre, il ne s'écoulerait que 4,5 années pour l'astronaute en voyage. Est-ce seulement les horloges qui seraient plus lentes pour l'astronaute ? Tous les processus, y compris les processus biologiques, se produisent, selon l'observateur terrestre, à un rythme plus lent pour l'astronaute. Plusieurs expériences ont permis de vérifier cet effet :

GPS (Global Positioning System)
Ce dispositif, qui nous permet de repérer notre position quel que soit le lieu où nous nous trouvons sur Terre, est constitué de 24 satellites en orbite terrestre à 20'163 km, chacun transportant une horloge atomique (vitesse de 3,974 km/s avec 2 fréquences d'émission : 1'575,42 MHz et 1'227,6 MHz). Les coordonnées du lieu où nous nous trouvons (longitude, latitude et altitude) sont déduites du temps mis par un signal radio pour aller jusqu'à 4 d'entre eux et revenir jusqu'à nous. On comprend que la mesure

de ce temps de propagation doit être la plus précise possible : à cause de la grande valeur de la vitesse des ondes radio (vitesse de la lumière), une erreur de 1 millionième de seconde sur sa mesure correspondrait à une erreur de localisation de 300 m. Ainsi, pour obtenir une précision de 15 mètres, faut-il mesurer ce temps avec une précision de 50 milliardièmes de seconde correspondant au temps mis par la lumière pour parcourir cette distance. Pour réaliser des mesures temporelles aussi précises, il faut évidemment tenir compte de tout ce qui peut les perturber et d'abord des effets relativistes qui dilatent le temps des satellites en mouvement par rapport à la Terre : sachant que ces derniers se déplacent à environ 4 km/s et en nous limitant au seul effet de dilatation du temps, la relativité restreinte nous indique que leurs horloges retardent de 7,5 microsecondes par jour par rapport à la nôtre : Elle correspondrait à une incertitude de 1,5 mètre par minute pour un total de plus de 2,25 km en une seul journée. Cet effet propre à la relativité restreinte n'est ni le seul à intervenir, ni le plus important. Il s'y ajoute essentiellement un effet gravitationnel prévu par la *relativité générale* : l'écoulement du temps est d'autant plus lent que l'on s'approche d'une masse. Pour les satellites utilisés, qui gravitent à 20'200 km de la surface terrestre, cet autre effet intervient pour 45 microsecondes par jour mais il joue dans le sens contraire de la relativité restreinte : le temps du satellite est plus rapide à cause de son éloignement de la masse terrestre (RG) mais il nous apparaît simultanément ralenti à cause du mouvement (RS). Les 2 effets se retranchent donc et l'on obtient au total un écart de $37{,}5 \cdot 10^{-6}$ s par jour entre les temps indiqués par les 2 horloges terrestre et spatiale. Si l'on ne tenait pas compte de l'ensemble de ces corrections relativistes, cette valeur correspondrait à une erreur de localisation de 11 km en une seule journée.

➧ Vols autour de la Terre,

➧ Temps de vie de muon :

Les muons sont des particules produites entre 5 et 10 km d'altitude par le rayonnement cosmique (désintégration de mésons π issus de l'interaction de protons de très haute énergie avec les particules atmosphériques. Ils se désintègrent en donnant un électron, un neutrino muonique et un antineutrino électronique. On s'aperçoit qu'un muon, dans son référentiel propre, c'est-à-dire dans le référentiel où il est au repos, ne « vit » en moyenne que 2,2 millionièmes de seconde avant de se désintégrer. Avec un temps si faible, une telle particule, même si elle pouvait se déplacer à la vitesse de la lumière, ne pourrait parcourir au mieux que quelques 650 mètres et ne devrait donc jamais être détectée au niveau du sol. L'observateur terrestre la détecte pourtant en grande quantité et les mesures concordent exactement avec les calculs relativistes : on constate expérimentalement que l'horloge du muon en mouvement par rapport à moi, fonctionne moins rapidement que la mienne. En d'autres termes, le muon qui vient vers moi à très grande vitesse « vieillit » moins vite et a donc le temps de parcourir une distance plus grande que prévue en venant jusqu'au sol. Pour être précis, les muons utilisés pour vérifier ce résultat se déplaçaient à 99,52% de la vitesse de la lumière soit à 298'000 km/s. A cette vitesse, leur durée de vie par rapport à la Terre était environ 10 fois supérieure à leur durée de vie propre. Avant de se désintégrer, ils avaient donc le loisir de parcourir non pas 650 m, mais près de 10 fois plus, soit 6,5 km…et donc d'arriver jusqu'au sol où ils furent détectés !

➧ CERN :

Des applications quotidiennes de ce résultat relativiste sont réalisées dans les grands accélérateurs où des particules de durée de vie extrêmement courtes seraient pratiquement inobservables si leur grande vitesse ne « dilatait » leur temps de vie en nous permettant de les stocker et de les étudier pendant des durées beaucoup plus grandes.

➧ Autre exemple : Réciprocité des dilatations des durées

La contraction de longueurs

Une autre conséquence des 2 résultats pris en compte par Einstein (généralisation du principe de relativité de Galilée à tous phénomènes physiques et constance de la vitesse de la lumière) est « la relativité de longueurs » ou, plus exactement, la « relativité de la dimension d'un objet dans le sens de son déplacement ».
La loi de contraction des longueurs peut s'énoncer de la façon suivante :

La mesure de la longueur d'un corps en mouvement est plus petite que la mesure de la longueur de ce même corps au repos :

$$L = L_o \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

où

L_o = longueur propre (longueur du corps ou distance entre 2 points mesurée par un observateur au repos relativement au corps).

Développement :

Notons que cette contraction est souvent appelée contraction de Fitzgerald ou de Lorentz car ces derniers proposèrent le même facteur de contraction, $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, afin d'éliminer la contradiction entre la théorie de l'éther et les résultats de l'expérience de Michelson-Morley. Notez cependant que la théorie d'Einstein prédit cette contraction sans référence aucune à l'éther.

Ex : Si je mesure, à partir du référentiel terrestre, la longueur du vaisseau spatial, je ne trouverai pas la même valeur que l'astronaute. Notons que pour l'astronaute, comme pour l'observateur terrestre, une mesure de longueur exige de considérer 2 coordonnées de position au même instant. Les longueurs sont, elles aussi, des grandeurs relatives ; lorsque je parle de « 10 mètres », je dois préciser s'il s'agit de 10 mètres par rapport au référentiel terrestre ou de 10 mètres par rapport au vaisseau.

Concernant l'exemple des muons, essayons d'interpréter ce résultat en prenant place, non plus sur le référentiel terrestre, mais aux côtés du muon, soit encore «dans le repère du muon ». En d'autres termes, regardons comment l'astronaute-muon à bord de son vaisseau-muon, peut interpréter le fait d'arriver jusqu'au sol : pour lui tout se passe à bord comme s'il était à l'arrêt (principe de relativité). Sa « durée de vie » est donc déterminée sans ambiguïté : il « sait » qu'il ne dispose que de 2,2 millionièmes de secondes avant de se désintégrer. Observant l'horizon, il « voit » la planète Terre s'approcher de lui à une vitesse proche de celle de la lumière jusqu'à entrer en collision avec elle. Se retrouvant ainsi sur le sol, l'astronaute-muon se fait la réflexion suivante : sachant que je suis « toujours vivant » alors que je ne vis que 2,2 millionième de secondes, et sachant que la vitesse de la Terre par rapport à moi était au plus égale à celle de la lumière, je puis en déduire avec certitude que son atmosphère a une épaisseur inférieure à 650 mètres ; sans cela, je me serais désintégré bien avant que le sol n'entre en collision avec moi. C'est la notion de « contraction des longueurs » déduite des calculs d'Einstein : le muon peut se retrouver sur le sol parce que pour lui, l'atmosphère terrestre est beaucoup moins épaisse que pour nous.
En résumé, l'épaisseur d'atmosphère traversée est de 6500 mètres par rapport à l'observateur terrestre qui voit l'atmosphère « immobile » mais de 650 mètres seulement par rapport à l'astronaute-muon qui la voit approcher à grande vitesse. Bien que les mètres utilisés par tous les

observateurs soient rigoureusement identiques, le mètre qui est en mouvement par rapport à moi, m'apparaît toujours plus court que le mien.
La longueur devenant une grandeur relative, il y a toujours de nombreuses réponses possibles à la question « quelle est la longueur de tel objet… ? » Parmi toutes les réponses possibles, c'est toujours l'observateur qui se trouve immobile à côté de lui qui trouve la longueur la plus grande. Pour clarifier le vocabulaire, cette longueur est appelée « longueur propre ».
En fait, la longueur est relative : elle est telle pour un observateur et telle pour un autre, exactement comme la trajectoire d'un objet lâché dans un train est une droite pour le passager du train et un arc de parabole pour un observateur extérieur. Terminons par dire que la vitesse de l'objet doit être de 260'000 km/s pour qu'il apparaisse avec une longueur égale à la moitié de sa longueur propre.

Réciprocité et perspective dynamique

La dilatation des durées et la contraction des longueurs sont des effets réciproques.
Soulignons le fait que cette réciprocité apparaît logique, puisqu'en relativité le phénomène observé n'est pas une propriété de l'objet lui-même mais une propriété de ma relation à lui. Si les résultats n'étaient pas réciproques, il deviendrait possible, en contradiction totale avec le caractère relatif du mouvement, de déterminer lequel des observateurs s'est déplacé (et même de déterminer sa vitesse absolue) : il suffirait pour cela de comparer leurs horloges ; celle qui aurait tourné le moins serait sans ambiguïté celle qui était en mouvement !
Cette réciprocité doit se comprendre comme un effet de *perspective « dynamique »* généralisant la notion de perspective « statique » apparue en peinture à la Renaissance (Piero della Francesca).

- Lorsque j'observe une personne éloignée de moi, elle me paraît plus petite mais pour elle, de façon totalement réciproque, c'est moi qui lui parais plus petit. Dans notre perspective « statique » quotidienne, lorsque 2 personnes sont éloignées l'une de l'autre, chacune voit ainsi l'autre plus petite. Cela provient du caractère relatif et réciproque de la notion d'éloignement : si 2 personnes sont éloignées l'une de l'autre, la première est tout aussi éloignée de la seconde que la seconde est éloignée de la première.
- De même, lorsque j'observe une personne en mouvement par rapport à moi, je constate que son horloge tourne plus lentement que la mienne, mais pour elle, de façon totalement réciproque, c'est bien mon horloge qui tourne le moins vite. Dans cette perspective « dynamique », lorsque 2 personnes sont en mouvement l'une par rapport à l'autre, chacune voit l'horloge de l'autre tourner moins rapidement et prendre le même retard. Cela provient du caractère relatif et réciproque de la vitesse : si 2 personnes sont en mouvement l'une par rapport à l'autre, la première se déplace tout autant par rapport à la seconde que la seconde de déplace par rapport à la première.

A présent, nous devons faire la remarque suivante :

- Une personne aperçue à l'horizon garde sa taille normale et n'est pas réduite à un point ; c'est moi qui la vois toute petite. De même :
- Dans une fusée que je verrais passer à une vitesse proche de celle de la lumière, le temps des cosmonautes s'écoulerait toujours de façon identique ; c'est moi observateur terrestre, qui ne le verrait pratiquement plus s'écouler. Ainsi verrais-je les cosmonautes se déplacer, manger, vivre de façon extrêmement lente ; il me faudrait un temps très long pour voir ce qu'ils font pendant une durée très courte mesurée à leur horloge.

En résumé, la relativité restreinte nous montre que les durées ne sont pas des notions absolues mais dépendent au contraire du référentiel ; elle ne fait que généraliser au cas du mouvement, les effets de perspective auxquels nous sommes habitués dans la vie courante. Avec elle, nous passons de la perspective « statique » (≅ photo) à la perspective « dynamique » (≅ film) : Einstein nous fait passer de la « photo » newtonienne, au film. De ce fait, ce résultat relativiste place le physicien qui cherche à représenter le monde, dans une situation analogue à celle de l'artiste : si je veux décrire le monde de façon cohérente en ce qui concerne les durées, je dois attribuer aux phénomènes des durées d'autant plus courtes que je vois les objets ou les personnes correspondantes se déplacer plus rapidement. Ne pas le faire entraînerait dans ma description des distorsions, des incohérences tout à fait analogues à celles que je découvre dans un dessin naïf qui ignore la perspective.

Ex : Si un cosmonaute qui passe devant moi à grande vitesse me téléphone pour dire que sa manœuvre va durer 1 heure à *sa montre*, il faut que je traduise que dans mon monde à moi (relativement à moi), la manœuvre prendra 10 heures à ma montre pour que son information concorde avec la mienne ; c'est là une exigence incontournable si je veux que les manœuvres des différentes fusées que je suis chargé d'aiguiller restent *cohérentes* dans mon emploi du temps et de celle de la base dans laquelle je travaille, si je veux pouvoir les organiser sans risque de collisions.

Bien sûr, de même qu'un effet de perspective statique ne se remarque pas s'il s'agit d'objets proches, la perspective dynamique est négligeable s'il s'agit de mouvements très lents.
Notons encore que pour passer d'un référentiel à l'autre, nous utilisons les transformations de Lorentz qui sont comme des règles de correspondance permettant de passe de ce que je vois à ce que voit tel ou tel autre observateur en mouvement uniforme par rapport à moi : elles constituent une sorte de « dictionnaire » mathématique me permettant de passer des valeurs mesurées dans un référentiel aux valeurs correspondantes trouvées dans un autre référentiel.
Finalement, y a-t-il *réellement* contraction « de Lorentz » pour les objets se déplaçant à haute vitesse ?
L'interprétation de Lorentz d'une part et celle d'Einstein s'opposent :

- Pour Lorentz, la longueur d'un corps varie objectivement selon qu'il se déplace ou non dans l'éther parce que des forces agissent alors sur leurs atomes ; il en est de même pour les effets de dilatation du temps. Cette interprétation est d'ailleurs suffisante pour rendre compte de l'expérience de Michelson.
- Einstein, quant à lui, trouve les mêmes équations mais leur donne un contenu physique totalement différent. Il n'y a pas « d'effet de vitesse » et c'est bien parce qu'il s'agit de perspective que tous les phénomènes, même biologiques, obéissent à la même loi de relativité. En citant Einstein : « En effet, il n'y a pas « réellement » contraction dans la mesure où elle n'existe pas pour un observateur en mouvement avec le système ; il y a pourtant « réellement » contraction, en ce sens que, pour un observateur qui ne partage pas le mouvement du système, elle peut être, en principe, mise en évidence par un moyen physique ». En fait, ce sont des [effets réels de perspective](#) ! [Autre exemple](#)

Effet Doppler lumineux

En présence d'un émetteur (E) et d'un récepteur (R), l'effet Doppler se calcule de la façon suivante ; si $v = v_{ER} = v_{RE}$ = module de la vitesse de l'émetteur par rapport au récepteur et réciproquement :

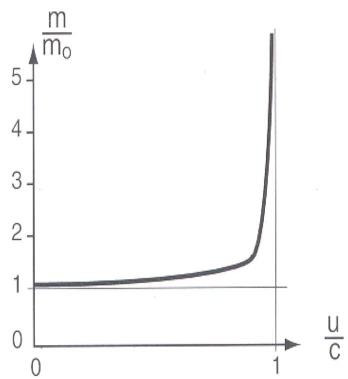
$$\nu' = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}\,\nu$$ lorsque E et R se rapprochent (Blue shift)

$$\nu' = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}\,\nu$$ lorsque E et R s'éloignent (Red shift)

Développement :

Dynamique relativiste : La masse, la quantité de mouvement et l'énergie

On pourrait supposer que la masse est, comme le temps et la longueur, une grandeur relative (dépendant du référentiel). En effet, Einstein a montré que la masse « relativiste » d'un corps mesurée dans le référentiel d'un observateur augmente au fur et à mesure que sa vitesse augmente par rapport au référentiel de l'observateur et que la masse relativiste *m* est donnée par la formule suivante :



$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

où

m_0 = masse au repos du corps (la masse mesurée dans référentiel dans lequel le corps est au repos).
m = masse mesurée dans un référentiel dans lequel le corps est animé d'une vitesse v.

Cette propriété a été démontrée expérimentalement notamment en physique des particules (muons).

Le graphique présente le comportement de la masse relativiste lorsqu'on s'approche de la vitesse de la lumière. La masse, c'est-à-dire l'inertie, tendant vers l'infini, aucune force aussi grande soit-elle ne pourra plus la faire accélérer. C'est ce qui explique pourquoi la vitesse de la lumière est une vitesse limite qu'il est impossible d'atteindre. En effet, il s'agit d'un effet de perspective dynamique (voir, à ce propos, la remarque en page 20).

Développement :

La quantité de mouvement relativiste d'une particule se définit par l'expression suivante :

$$\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m_0 \vec{v}$$

La seconde loi de Newton s'énonce dans sa forme la plus générale :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

Remarquons que, comme la masse relativiste dépend de la vitesse, la seconde loi de Newton écrite sous la forme $\vec{F} = m\vec{a}$ **n'est plus valide** (il nous faut également tenir compte de la dérivée de la masse par rapport au temps).

Finalement, notons que si v dépassait c, le facteur $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ deviendrait la racine carrée d'un nombre négatif, soit un nombre imaginaire : les longueurs, la masse et les intervalles de temps ne seraient pas réels. On en conclut donc que les corps ordinaires ne peuvent pas égaler ou dépasser la vitesse de la lumière.

Toutefois, les équations d'Einstein, comme on le remarqua vers la fin des années 60, n'excluent pas la possibilité que des particules existent dont la vitesse soit toujours plus grande que c. Si de telles particules existaient (tachyons), leur masse au repos, m_0, devrait être imaginaire. De cette manière, leur masse m serait, pour v > c, le rapport de 2 nombres imaginaires, soit un nombre réel. Pour de telles particules, c serait une limite inférieure à leur vitesse.

L'équivalence masse-énergie

Quand on applique une force nette constante sur un corps dont la masse est m_0, la vitesse du corps augmente. Comme la force agit sur une certaine distance, le corps subit un travail et son énergie augmente.

Non seulement le travail subi par le corps augmente sa vitesse mais contribue également à augmenter sa masse relativiste. Dans le cas classique, le travail contribue à augmenter son énergie (et notamment l'énergie cinétique K). Cette nouvelle caractéristique de la théorie de la relativité d'Einstein conduisit à la thèse qu'une masse est une forme d'énergie :

$$E = mc^2 = m_0c^2 + K$$

Développement :

L'énergie totale d'une particule au repos, soit son énergie au repos, est $E_0 = m_0c^2$. Cette formule lie de façon mathématique les concepts d'énergie et de masse. Toutefois, pour que cette idée ait un sens physique, il faut que la masse soit convertible en énergie et vice versa.

Développement : expérience de pensée d'Einstein

Une expérience de pensée « toute simple » nous apprend ainsi que la notion de masse est reliée à celle d'énergie. De façon plus précise : la masse d'un corps est la mesure de l'énergie qu'il contient lorsqu'il est au repos.
Comme exemple, notons qu'un seul gramme de matière (or, bois, déchets,…) suffirait à libérer une quantité de chaleur équivalente à celle de 2200 tonnes de pétrole ou pour faire briller une lampe de 100 W pendant 30'000 ans, l'équivalent énergétique de 3 millions de francs suisses d'électricité.

Ainsi, l'équation $E_o = m_0c^2$ nous dit qu'une variation de masse de 1 kg entraîne une variation d'énergie de $9 \cdot 10^{16}$ [J] alors que mis sous la forme suivante $m_0 = E_o / c^2$, cette équation nous dit de façon plus modeste qu'une variation de 1[J] entraîne seulement une variation de masse de 10^{-17} [kg].
Par exemple :

- La masse d'un litre d'eau augmente seulement de 0,005 milliardième de gramme en s'échauffant de 0 à 100 degrés
- La masse d'une montre est seulement supérieure de 1 millionième de milliardième de gramme lorsque sa pile est neuve.
- A cause de la force gravitationnelle qui cherche à les rapprocher l'une de l'autre, 2 pommes de 150 g pèsent 10^{-28} kg de plus quand elles sont infiniment éloignées que lorsqu'elles sont côte à côte.

En résumé, il est beaucoup plus facile d'obtenir une quantité substantielle d'énergie à partir d'une masse que d'augmenter une masse de façon notable à partir d'énergie. Les premières vérifications expérimentales de l'équation $E_o = mc^2$ n'ont été observées qu'en 1933, soit 26 ans après la publication d'Einstein. Paul Dirac, appliquant le principe de relativité à la « mécanique quantique ondulatoire » avait prévu l'existence d'antimatière et précisé les conditions de la création de paires de particules et d'antiparticules à partir de rayons gamma : bien qu'ils soient dénués de masse, « la rencontre de 2 rayons gamma très énergétiques (chacun, d'énergie au moins égale à 510 keV), écrivait-il, pourrait conduire à la création simultanée d'un électron et d'un antiélectron (positon). L'expérience fut réalisée 2 ans plus tard par Irène Joliot-Curie et Frédéric Joliot d'une part, et par Lise Meitner et Henry Neddermeyer d'autre part.
De nos jours, de telles réactions de création de matière à partir d'énergie sont courantes en physique des particules où, par exemple, l'énergie du choc de 2 particules animées de grande vitesse est transformée en particules de masses appréciables. Ainsi lorsque 2 protons se rencontrent à très haute énergie (expérience du LHC), nous pouvons retrouver après le choc en plus des 2 protons initialement présents mais qui se trouvent alors animés de vitesses plus faibles, d'autres particules de masses appréciables qui proviennent de la transformation en matière de leur énergie cinétique initiale. Un tel résultat bouleverse nos concepts usuels : jusqu'à présent, nous pensions que le mouvement n'était qu'une simple propriété des corps sans que nous n'imaginions un lien entre mouvement et matière.

D'autre part, la transformation de masse en énergie est, elle aussi, demeurée longtemps hors de portée des meilleurs dispositifs expérimentaux. Ce n'est qu'en 1932 que Cockcroft et Walton réussirent à la démontrer en réalisant la première désintégration nucléaire artificielle : après avoir réussi à faire éclater un noyau de lithium en le bombardant avec des protons accélérés, ils constatèrent que la somme des masses de ses morceaux était légèrement plus faible que celle du noyau initial : la masse perdue avait été transformée en énergie. L'année suivante, Frédéric Joliot observait l'annihilation totale de matière et d'antimatière et l'apparition de l'énergie correspondante sous forme de rayonnement :

$$e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma$$

En fait, l'occurrence d'une réaction dépend de lois de conservation décrite en physique des particules (charge électrique, nombre baryonique, nombre leptonique,…)

Notons le fait qu'à l'heure actuelle, personne ne sait comment agir sur ces réactions de transformation d'énergie en masse ou de masse en énergie. L'énergie contenue dans un gramme de matière quelle qu'elle soit est énorme, mais personne ne connaît le secret pour l'en extraire : certains corps gardent jalousement leur énergie ; d'autres, les corps radioactifs, la donnent plus ou moins parcimonieusement, mais dans tous les cas, la quantité de matière transformée en énergie reste invariablement fixée par la nature. Ainsi :

- La nature transforme en énergie la totalité de la masse présente dans l'annihilation de matière et d'antimatière (rendement de 100%) ;

- Dans une réaction de « fusion thermonucléaire » fabriquant de l'hélium à partir d'hydrogène le rendement tombe à 0,78% (7,8 millièmes de la masse sont transformés en énergie) ;
- Dans la fission de l'uranium, il n'est plus que de $8 \cdot 10^{-4}$ %
- Dans une réaction chimique ordinaire, telle la formation d'une molécule d'eau à partir d'hydrogène et d'oxygène, ce rendement tombe à $1{,}5 \cdot 10^{-10}$ %.

On remarque dans ces exemples que ce rendement est très supérieur dans le domaine de la physique nucléaire. C'est la raison pour laquelle la notion de « défaut de masse » est habituellement illustrée dans ce domaine mais ce choix est trompeur car il détourne l'attention du fait que toutes les productions d'énergie, quelles qu'elles soient, y compris donc les réactions chimiques ou physiques ordinaires, proviennent du même processus : du bois qui brûle, un muscle qui travaille, une pile électrique qui s'use, transforment de la masse en énergie selon la même relation $E_o = m_0c^2$.

Finalement, la masse varie-t-elle réellement avec la vitesse ?
Pendant de longues années, on a choisi de définir la masse en y incluant l'énergie de mouvement (énergie cinétique). Un tel choix faisait de la masse une grandeur croissante avec la vitesse et donc, puisque la vitesse est une grandeur relative, dépendante de l'observateur : dans ce contexte, la Terre avait une certaine masse pour nous qui la voyons immobile, mais une masse différente pour un observateur extérieur qui la regarderait passer. Actuellement, comme dans le cas des durées et des longueurs, on préfère appeler « masse » la « masse propre » du corps, c'est-à-dire celle qui est mesurée dans le référentiel où elle est au repos. Ce choix se justifie par le fait de vouloir réserver la notion de masse à une propriété intrinsèque des corps et donc indépendante de l'observateur et d'autre part pour des raisons de cohérence avec les autres concepts relativistes :
La masse apparaît comme un ***invariant relativiste*** défini par la relation :

$$m_0^2c^4 = E^2 - c^2\,p^2$$

et construit sur le quadrivecteur énergie-impulsion E, $c\vec{p}$; les composantes E et $c\vec{p}$ de ce quadrivecteur dépendent du référentiel, mais la différence de leur carré, et donc m, reste invariante quelle que soit la vitesse. Ainsi, la masse d'un corps est-elle constante alors que son énergie totale E et son impulsion $\vec{p}$ ne le sont pas. Dans ce contexte et avec le vocabulaire actuel, les expériences réalisées pour vérifier « la variation de m avec la vitesse » sont en réalité des vérifications de la variation de l'impulsion $\vec{p}$ avec la vitesse. Concluons ce paragraphe en nous posant 2 questions :

1. Est-ce qu'une particule sans masse se déplace forcément à la vitesse de la lumière c ?

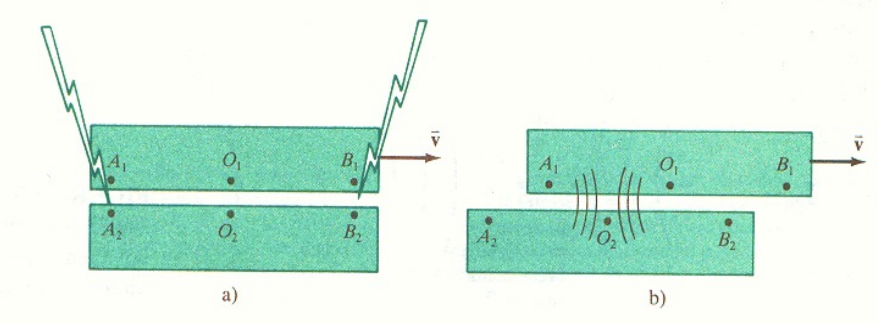
2. Le photon a-t-il une masse ? Petit détour par la mécanique quantique…

La théorie quantique des champs décrit l'ensemble des interactions forte, faible et électromagnétique par des échanges de particules virtuelles appelées « particules d'interaction » : pour l'interaction forte, ces particules sont les gluons ; pour les forces nucléaires faibles, il s'agit des trois particules appelées W^+, W^- et Z^0 ; pour les forces électromagnétiques qui s'exercent entre les particules électriquement chargées (électrons, protons) il s'agit des photons. Ainsi, la lumière se trouve-t-elle avoir aussi pour tâche d'être l'agent de liaison des charges électriques qui s'attirent ou se repoussent en « jouant aux photons ».
Pour illustrer le « mécanisme » de la répulsion de 2 électrons dans le cadre de cette représentation, considérons le cas de 2 personnes jouant au ballon sur une patinoire bien glissante, en supposant, pour que l'effet cherché soit plus spectaculaire, que le ballon est assez lourd. Au moment du lancé, la personne qui envoie le ballon subit un léger recul ; au moment où elle le saisit, la personne qui le reçoit recule elle aussi sous l'effet du choc, et recule à nouveau en le renvoyant. Ainsi, qu'ils envoient ou reçoivent le ballon, les 2 partenaires reculent au fur et à mesure de leur jeu et s'éloignent progressivement l'un de l'autre. De même, 2 électrons se repoussent en « jouant au photon », chacun émettant tour à tour un photon que l'autre absorbe avant de le lui renvoyer.
Dans un tel « jeu », il est essentiel de noter que la distance qui peut séparer les 2 partenaires dépend de la masse du ballon : si celui-ci est trop lourd, le jeu ne peut se pratiquer que lorsqu'ils sont assez proches. Si le ballon a une

masse nulle, rien n'empêche au contraire qu'il puisse se pratiquer sur des distances aussi grandes que l'on veut. Les relations d'incertitude de Heisenberg imposent à la durée d'un échange entre les 2 partenaires de ne pas dépasser $\hbar / mc^2$; seules les particules sans masse ont une portée infinie. Ainsi, la portée des interactions décrites par la théorie quantique des champs dépend-elle essentiellement de la masse des particules échangées. Lorsque celle-ci est nulle, l'interaction a une portée infinie, ce qui signifie que la force correspondante va pouvoir s'exercer entre les 2 corps, quelle que soit leur distance ; lorsqu'elle ne l'est pas, l'interaction n'a qu'une portée limitée, d'autant plus faible que la masse de la particule d'interaction est plus importante : à titre d'exemple, c'est parce que le méson π, qui assure la cohésion du noyau de l'atome, est une particule massive qui ne peut s'échanger que sur un peu plus de 10^{-15} m, que le noyau ne peut avoir de dimension supérieure à cette valeur. En toute rigueur, la structure du noyau est plus complexe : les nucléons qui composent le noyau atomique sont eux-mêmes constitués de quarks qui interagissent en s'échangeant des gluons. L'interaction forte, source de la stabilité du noyau, est ainsi véhiculée par des gluons.
Cette rapide description des forces en théorie quantique des champs nous éclaire sur une manière possible de mesurer la masse du photon : si celui-ci n'a pas de masse, les particules chargées peuvent « jouer » au photon quelle que soit leur distance et la force électrique a donc une portée infinie ; s'il possède au contraire une masse il n'en sera plus de même. Les dernières expériences montrent que la masse du photon, si elle existe devrait être inférieure à 10^{-63} kg !

La relativité de la simultanéité et l'intervalle d'espace-temps

Est-ce que le fait que 2 événements soient simultanés dépend du référentiel ?
2 événements sont simultanés s'ils se produisent exactement en même temps. Cependant, comment affirmer que 2 événements se sont produits en même temps ?
Quand les 2 événements se produisent en des lieux éloignés l'un de l'autre, il est plus difficile de l'affirmer puisqu'il faut pour cela tenir compte du temps mis par la lumière pour nous atteindre. Comme la vitesse de la lumière est finie, une personne qui observe 2 événements doit calculer, en soustrayant le temps de propagation de la lumière, quand ils se sont effectivement produits. Si l'un des 2 événements observés en même temps s'est produit à une plus grande distance de l'observateur que l'autre, celui-ci doit conclure qu'il s'est aussi produit antérieurement à l'autre et que les 2 événements ne sont pas simultanés.
Imaginons 2 événements (2 éclairs) perçus par les 2 observateurs O_1 et O_2 situés dans 2 trains différents :



2 éclairs frappent nos 2 trains en A_1 et B_1 sur le train de O_1, et en A_2 et B_2 sur le train de O_2.
O_1 et O_2 sont à mi-chemin entre A_1 et B_1, A_2 et B_2 respectivement. Imaginons-nous dans le référentiel de O_2, de sorte que nous voyons O_1 se déplaçait vers la droite à la vitesse v.
Supposons aussi que les 2 événements se produisent simultanément dans le référentiel O_2 et juste au moment où O_1 et O_2 se trouvent face à face. Comme les distances A_2O_2 et B_2O_2 sont égales, les 2 événements sont bien simultanés pour O_2.
Par contre, O_1 est animé d'une vitesse v et par conséquent, la lumière provenant de B_1 a déjà dépassé O_1 tandis que celle provenant de A_1 n'a pas encore atteint O_1. Il est donc clair que O_1 voit la lumière provenant de B_1 avant celle provenant de A_1. Comme les distances O_1A_1 et O_1B_1 sont égales, l'observateur O_1 doit conclure que l'événement en B_1 s'est produit avant l'événement en A_1.

Nous voyons donc que 2 événements simultanés pour un observateur ne le sont pas nécessairement pour un second observateur en A_1.
Qui des 2 observateurs O_1 et O_2 avaient raison ?
Selon la théorie de la relativité, tous les 2 ont raison. La simultanéité n'est pas un concept absolu mais plutôt relatif.

Un passager dans un train roulant à grande vitesse, disons à 0,65c commence son repas à 20h00 et le termine à 20h15, selon l'horloge du train. Comme les 2 événements, soit le début et la fin du repas, se produisent au même point du train, le temps propre entre ces 2 événements est de 15 minutes. Pour des observateurs au sol, le repas dure plus longtemps, soit 20 minutes selon l'équation de la dilatation du temps. Supposons que le diamètre du plateau sur lequel est servi le repas est de 20 cm. Pour les observateurs au sol, le plateau n'a que 15 cm de longueur (contraction des longueurs). Pour eux donc, quoique la quantité de nourriture servie semble plus petite, le repas dure plus longtemps. En un sens, les 2 effets, la dilatation du temps et la contraction des longueurs, se contrebalancent. Du point de vue d'un observateur au sol, le repas semble gagner en durée ce que la nourriture perd en quantité. L'espace, ou la longueur, est échangé pour du temps.
Des considérations de ce genre ont mené à l'idée de l'espace-temps à 4 dimensions, 3 dimensions spatiales et une dimension temporelle. Le temps et l'espace sont intimement inter-reliés. Le caractère réellement insolite de l'espace-temps à 4 dimensions provient du fait que l'espace et le temps y sont pour ainsi dire joints indissolublement : quand le référentiel change, le temps et l'espace s'échangent un peu l'un pour l'autre.

Comme ainsi le temps et l'espace sont des grandeurs relatives, y a-t-il tout de même une grandeur invariante ?
La théorie de la relativité fait apparaître l'invariance d'une quantité mesurable appelée « l'intervalle des événements » ou « l'intervalle d'espace-temps » et qui n'est ni leur distance dans l'espace ni leur distance dans le temps, mais une sorte de mélange de longueurs et de durées.
Pour illustrer la découverte de cet invariant, imaginons la scène suivante :

- Un observateur galiléen nous assure, par exemple, qu'une fusée a parcouru une distance de 5 unités en un temps de 7 unités ;
- Un autre, en mouvement par rapport au premier, soutient au contraire qu'elle a parcouru la distance de 1 unité en un temps de 5 unités.

Comment peuvent-ils se mettre d'accord ?
En écoutant ces 2 observateurs défendre leurs points de vue, on peut noter cette constance dans leur déclarations : la relation algébrique « la durée du phénomène multipliée par elle-même, diminuée du résultat de l'opération : distance parcourue multipliée par elle-même » est identique dans les 2 cas.
Ainsi, dans l'exemple ci-dessus :

- Pour le premier observateur : $7^2-5^2 = 24$, et
- Pour le second : $5^2 - 1^2 = 24$

Il apparaît clairement que cette grandeur est indépendante de l'observateur et donc absolue. La racine carrée « ds » de cette grandeur habituellement notée « ds^2 » définit *l'intervalle d'espace-temps entre 2 événements* :

$$ds^2 = c^2t^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$$

Minkowski affirmait le fait que si l'on considère les coordonnées x, y, z , it comme les coordonnées d'un point dans un espace à 4 dimensions, les transformations de Lorentz se réduisent à des rotations de cet espace et laissent la forme quadratique $ds^2 = c^2t^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$ invariante ce que l'on peut observer dans « le diagramme de Minkowski ».

Faisons à présent le lien avec la simultanéité.
Qu'advient-il lorsqu'un observateur voit 2 événements se produire de façon simultanée ?
Considérons par exemple le cas où 2 événements, séparés par une distance égale à 5 unités, sont simultanés pour un observateur donné et donc séparés par un intervalle de temps nul. Pour cet observateur, le carré de l'intervalle des événements s'écrit :

$$ds^2 = 0^2 - 5^2 = - 25$$

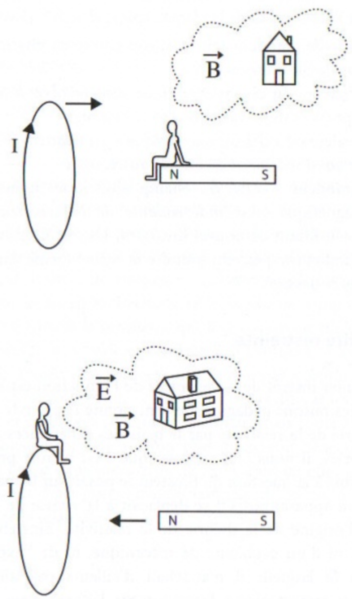
Son invariance impose à tous les observateurs en mouvement uniforme par rapport à celui-ci de trouver la même valeur « -25 ». Sachant qu'ils ne vont pas trouver la même distance entre les 2 événements, on en déduit sans difficulté que pour eux, l'intervalle temporel qui les sépare ne pourra plus être nul. Ainsi, l'un d'eux, en mouvement rectiligne uniforme par rapport au premier, trouvera peut-être un intervalle temporel de 12 unités et une distance de 13 unités puisque :

$$ds^2 = 12^2 - 13^2 = -25$$

2 événements simultanés pour le premier observateur ne sont donc pas simultanés pour l'autre. Plus encore, on peut montrer à l'aide des transformations de Lorentz que l'ordre temporel de 2 événements n'est pas forcément le même pour tous les observateurs : 2 événements A et B, simultanés pour l'un (intervalle temporel nul entre les dates de A et de B), peuvent apparaître dans l'ordre A puis B pour un autre et dans l'ordre inverse B puis A pour un 3ème.

L'électrodynamique des corps en mouvement et le principe de covariance

L'expérience



Considérons l'expérience d'induction, utilisant un barreau aimanté et une spire de fil électrique qui avait si profondément impressionné Einstein au cours de ses études. Un ampèremètre relié à la spire permet de déceler la présence d'un éventuel courant.

- Dans un premier temps, laissons l'aimant fixe. Lorsque nous en approchons la spire, un courant électrique se manifeste dans le fil.
- Dans un second temps, laissons au contraire la spire fixe. Lorsque nous en approchons l'aimant à la même vitesse, le même courant électrique apparaît.

Ces résultats n'ont à priori rien d'étonnant : d'après le principe de la relativité de Galilée, bouger la spire par rapport à l'aimant ou l'aimant par rapport à la spire revient au même, puisque le mouvement d'un corps ou d'un autre n'a pas de sens absolu et que seul compte celui de l'un par rapport à l'autre. Il est donc logique d'observer dans les 2 cas la même apparition du même courant électrique.

Le problème

A l'époque d'Einstein, un problème se pose lorsqu'il s'agit d'interpréter ces 2 expériences : dans les 2 cas, pourtant *physiquement équivalents*, le phénomène n'est pas décrit par les mêmes équations.

- Dans le premier (mouvement de la spire), il faut utiliser la relation :

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \text{ (force de Lorentz)}$$

- Dans le second (mouvement de l'aimant), il faut avoir simultanément recours aux 2 équations (loi de Faraday et de Lenz) :

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{avec} \quad \vec{F} = q\vec{E}$$

N'est-il pas choquant d'être obligé d'avoir recours à 2 descriptions mathématiques différentes pour décrire 2 expériences physiquement identiques ?
Einstein est particulièrement sensible à cette double incohérence :

- Pourquoi les « habitants » de la planète aimant auraient-ils une physique plus simple que ceux de la planète spire ? Se trouveraient-ils dans un recoin privilégié de l'univers ? Ne serait-il pas plus logique de penser que les lois physiques doivent être partout identiques ? C'est la question « copernicienne » de la covariance » : Copernic a découvert que la Terre n'est pas au centre du monde, blottie dans un lieu privilégié entre tous.
- Si le mouvement est relatif comme l'affirme la mécanique, pourquoi faudrait-il décrire l'apparition du courant de 2 façons différentes ? Une autre incohérence entre la mécanique et l'électromagnétisme est présenté par Poincaré : 2 électrons au repos se repoussent. Si je les observe depuis un référentiel en mouvement rectiligne uniforme, je les vois se déplacer, et ils m'apparaissent donc comme des « courants » électriques. Dans ce cas, le calcul me donne, en plus de leur répulsion électrostatique, une attraction qui a pour origine la force magnétique créée par les courants qu'ils constituent (2 courants de même sens s'attirent). Dans les 2 cas, la force existant entre les électrons apparaît donc différente puisque dans le premier, l'observateur ne mesure qu'une répulsion alors qu'une attraction s'y ajoute dans le second. Ce

comportement semble violer le principe de relativité qui exprime l'impossibilité de distinguer 2 référentiels galiléens.

La solution

Le « principe de covariance » implique que les lois de la physique s'écrivent de manière *identique* dans les 2 cas ; la Terre n'est pas un lieu privilégié au centre du monde ; la planète aimant et la planète spire ne le sont pas non plus. Einstein insistera souvent sur cette caractéristique du principe de covariance : il s'agit d'un principe heuristique qui est là pour nous aider à poser des questions et à découvrir les lois du monde.

Pour résoudre le problème qui nous intéresse, la seule issue possible est d'accepter l'idée que les 2 lettres $\vec{E}$ (champ électrique) et $\vec{B}$ (champ magnétique) puissent représenter une seule et même grandeur physique qui se manifesterait différemment aux différents observateurs. Cette hypothèse revient à faire de ces 2 champs 2 aspects différents d'une quantité unique se manifestant différemment à chaque observateur ; Grâce à cette idée de « covariance », Einstein en arrive ainsi à considérer le champ électrique et le champ magnétique comme des grandeurs relatives, qui n'apparaissent comme telles que dans la perspective particulière de tel ou tel observateur.

Par exemple :

- L'observateur de la planète-aimant soutient que dans son univers, la valeur du champ magnétique est de 4 unités alors que celle du champ électrique est de 0 unité.
- L'observateur de la planète-spire affirme au contraire que dans son environnement, le champ magnétique vaut 5 unités alors que la valeur du champ électrique est égale à 3 unités.

Nous avons déjà rencontré ce genre de situation à propos de l'espace et du temps, lorsque 2 voyageurs constataient leur désaccord à propos de leurs mesures respectives de longueurs et de durées. Le différent s'était réglé en découvrant que « le carré des durées diminué du carré des distances trouvées par chacun » était identique. Curieusement, cet invariant, dans notre cas, a une forme très proche de l'invariant d'espace-temps :

$$E^2 - c^2 B^2$$

Ainsi, les valeurs du champ électrique sont relatives à un observateur de même que celles du champ magnétique. Par contre, la grandeur $E^2 - c^2 B^2$ est indépendante de l'observateur et donc est absolue.

En fait, c'est bien le problème ci-dessus, ajouté à la question qu'Einstein se posait sur la manière dont l'univers lui apparaîtrait s'il se déplaçait à la vitesse de la lumière, qui est l'origine de la théorie de la relativité. « Dans la construction de la théorie de la relativité restreinte, l'expérience de Faraday sur l'induction électromagnétique a joué pour moi un rôle fondamental. C'est le phénomène d'induction magnéto-électrique qui m'a contraint à postuler le principe de relativité » (*Einstein*, 1919). En effet, son article fondateur s'intitule « Sur l'électrodynamique des corps en mouvement ».

Applications

1.- Pour créer un courant électrique dans un conducteur, il faut mettre en mouvement les électrons qui s'y trouvent et, pour cela, les soumettre à l'action d'une force électrique. L'expérience d'induction est à cet égard complètement surprenante : lorsqu'on approche la spire de l'aimant, un courant électrique apparaît dans la spire alors qu'un aimant, à priori, ne produit pas de champ électrique. Ce fait étonne Einstein qui a compris qu'une charge électrique ne peut être mise en mouvement que par l'action d'une force électrique. Il raisonne de la manière suivante :

- Par définition, seule une force électrique peut mettre un électron en mouvement
- Si un courant apparaît dans la spire, c'est donc que les électrons de la planète-spire « voient » une force électrique là où les habitants de la planète-aimant ne voient qu'un champ magnétique. « Mon chemin le plus direct vers la relativité restreinte fut principalement déterminé par ma conviction que la force électromotrice induite dans un conducteur placé dans un champ magnétique n'est rien d'autre qu'un champ électrique » (*Einstein*, 1952).

Notons que son raisonnement donne le moyen de fabriquer du courant : si un champ qui apparaît « magnétique » à un observateur immobile, est au moins partiellement vu comme un champ « électrique » par un observateur en mouvement, il suffit de déplacer un fil électrique devant un aimant pour que les électrons s'y sentent soumis à un champ électrique et se mettent à circuler dans le fil (moteur électrique, alternateur).

Dans une centrale électrique, le mouvement relatif de l'aimant et de la spire est créé par une chute d'eau ou par un jet de vapeur. Le champ magnétique de l'aimant est alors « vu » comme un champ électrique par les électrons de la spire qui se mettent donc en mouvement en créant ainsi le courant électrique dont nous avons besoin : c'est un effet relativiste !

2.- C'est également un effet relativiste et de mécanique quantique qui donne sa couleur caractéristique à l'or ou qui permet d'expliquer que le mercure soit liquide à température ordinaire.

3.- Découverte du « spin » (Dirac, 1928) à partir de l'équation de Schrödinger

4.- Découverte de l'antimatière (Dirac, 1931) et mise en évidence expérimentale du positon (Andersen, 1932)

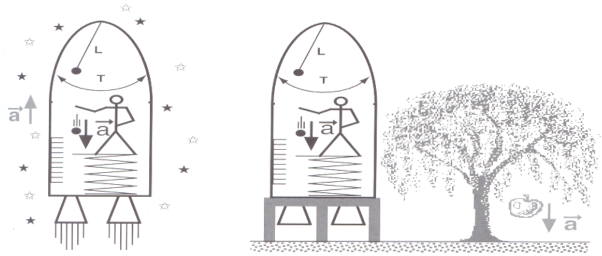
Introduction à la relativité générale

La théorie de 1905 s'appelle restreinte car elle ne concerne que les référentiels d'inertie, c'est-à-dire ceux qui sont en MRU les uns par rapport aux autres.
La théorie de la relativité générale, achevée en 1915, va quant à elle intégrer également les cas des référentiels accélérés.
Elle est construite sur 2 principes :
1.- Le principe de covariance : Toutes les lois de la physique doivent être valables dans tous les référentiels qu'ils soient accélérés ou non.
2.- Le principe d'équivalence : un référentiel uniformément accéléré est équivalent à un champ de gravitation.

Référentiel et Gravitation

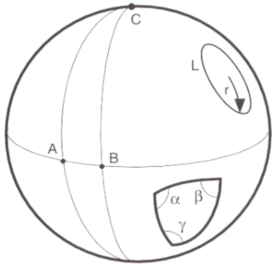
Ce dernier principe affirme qu'il est impossible, par des expériences de physique faites dans un laboratoire isolé, de déceler si l'on se trouve dans un champ de gravitation ou dans un référentiel en MRUA.
La notion de gravitation est liée au référentiel de l'observateur comme le montre la figure ci-dessous.

Les 2 situations sont indiscernables par quelque expérience de physique que ce soit.



Lorsque la fusée est posée sur le sol d'une planète, la chute d'un corps est décrite par l'action de la force de gravitation.
Lorsque la fusée se trouve en phase d'accélération, cette même chute y est décrite par l'action d'une force d'inertie exprimée en fonction de l'accélération de la fusée.
Le problème est ainsi identique à celui qui nous avons rencontré avec la spire et l'aimant : n'est-il pas choquant d'être obligé d'avoir recours à 2 descriptions mathématiques différentes, s'il s'agit de la même chute et surtout si aucune expérience ne permet de distinguer l'un ou l'autre cas ?
Pour Einstein, les 2 cas doivent pouvoir se décrire de façon unique sans qu'il y ait lieu de considérer que le passager de la fusée accélérée ait à utiliser une physique différente de celui de la fusée posée au sol.
Or, les 2 seuls ingrédients qui interviennent dans la notion d'accélération sont la distance et le temps. L'unification des 2 descriptions nécessite donc d'exprimer les effets du champ de gravitation en fonction de ces 2 mêmes ingrédients, donc en fonction de distances et de temps.
Ainsi, l'idée de covariance conduit-elle Einstein à faire de la gravitation une propriété de l'espace-temps.

Référentiel et Géométrie



Faisons à présent un petit aparté de géométrie. C'est Euclide qui fonde cette branche des mathématiques. Le 5ème postulat d'Euclide (l'axiome le plus célèbre) énonce par exemple que : par un point extérieur à une droite, il ne passe qu'une et une seule droite parallèle à la droite donnée. Ces postulats permettront de développer la géométrie et de découvrir des théorèmes tels que : la sommes des angles d'un triangle vaut 180°. La circonférence L d'un cercle de rayon r vaut le produit $2\pi r$.

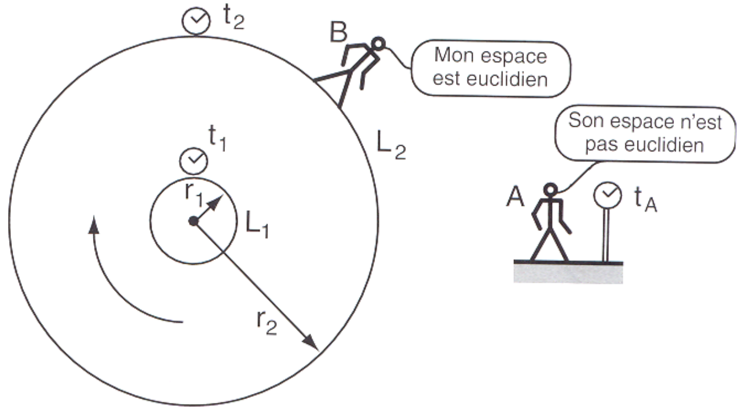
A partir du XIXème siècle, des mathématiciens analysant les propriétés cette fois de l'espace tels que Lobatchevski, Gauss, Riemann développent des géométries non euclidiennes décrivant des espaces tridimensionnels courbés (non représentables mentalement). Survient alors la notion de géodésique : le plus court chemin entre les points A et B. Dans le plan euclidien, une géodésique est représentée par une droite.

Cependant, à la surface d'une sphère, la géodésique entre 2 points A et B est un arc de grand cercle.

Toutes les géodésiques passant par C coupent celle de AB. Il n'existe aucune droite passant par C parallèle à celle qui est définie par AB. De plus, sur une telle surface, la somme des angles d'un triangle est supérieure à 180° et la circonférence L d'un cercle vaut moins que le produit $2\pi r$. Disons encore que cette espace est infini, qu'il a une courbure négative variable, et qu'il est ouvert (les géodésiques viennent de l'infini et vont jusqu'à l'infini).

Revenons à la relativité générale et montrons que des liens existent entre géométrie et référentiel.

Considérons une expérience de pensée (Gedanken Experiment comme les appelait Einstein) :



Un observateur A se trouve dans un référentiel d'inertie et un observateur B se trouve dans un référentiel tournant comme un grand carrousel. Cet observateur B est accéléré (MCU). 2 circonférences sont tracées sur le carrousel ; l'une de rayon r_1 très petit relativement au rayon r_2 de l'autre. L'accélération est plus grande en r_2 qu'en r_1.

Les 2 observateurs A et B font les mêmes mesures des rayons r_1 et r_2. En effet, ces longueurs ont des vitesses perpendiculaires à elle-mêmes pour A et elles sont immobiles par rapport à B. Par contre, s'ils mesurent la même circonférence L_1, ils ne mesureront pas la même circonférence L_2. En effet, les longueurs composant L_1 ont une très faible vitesse pour A (car près du centre), mais celles qui composent L_2 ont une grande vitesse parallèlement à elle-même, elles seront donc affectées des effets prévus par la théorie de la relativité restreinte. Ainsi, pour B, les 2 circonférences se calculent par la relation euclidienne habituelle : $L = 2\pi r$. Mais, pour A, la grande circonférence vaut moins que le produit $2\pi r$, ce qui signifie que ce référentiel, pour lui, n'est pas euclidien alors qu'il l'est pour son collègue.

On voit donc que la géométrie est liée au référentiel.

En raisonnant pour le temps comme pour les longueurs, on s'aperçoit que A voit le temps t_1 comme B et comme le sien t_A. Il voit par contre le temps t_2 dilaté par rapport à t_1 ou par rapport au sien. Donc, l'écoulement du temps dépend du lieu.

Dans notre exemple, c'est l'horloge la plus accélérée qui retarde par rapport à l'autre.

Gravitation et Géométrie

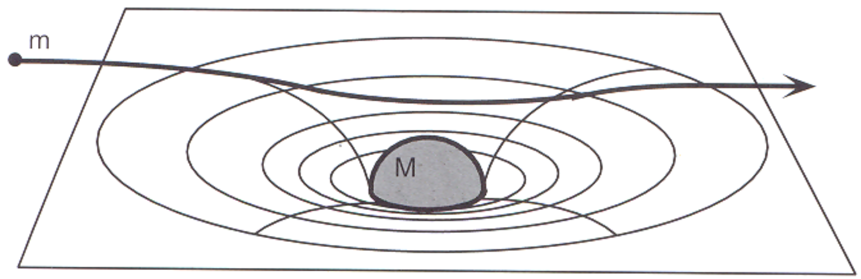
Nous avons vu que la notion de gravitation était liée au référentiel et que la géométrie l'était aussi. On peut donc avoir l'intuition que géométrie et gravitation vont aussi être liées : C'est justement CE LIEN ENTRE GEOMETRIE ET GRAVITATION que décrit la théorie de la relativité générale.

L'espace-temps

Dés la théorie de la relativité restreinte, espace et temps sont intimement liés et l'on doit alors raisonner dans ce qu'on appelle un continuum d'espace-temps dans lequel tout événement E est repéré par un ensemble de 4 coordonnées, trois spatiales et 1 temporelle : (x,y,z,t).

Courbure de l'espace-temps

Des calculs de la relativité générale, il ressort que l'espace-temps est influencé par les masses qui s'y trouvent et qui le courbent.
En ne donnant que 2 dimensions à l'espace-temps, on peut le représenter comme la surface molle d'un bloc de mousse.
La présence d'une masse M va créer un creux d'autant plus profond que la masse est grande, c'est-à-dire qu'elle va localement *courber* l'espace-temps.



Si une particule de masse m se déplace librement dans l'espace-temps, elle suit une géodésique.
Sans la présence de M, l'espace-temps n'est pas courbé, c'est-à-dire qu'il est euclidien et que les géodésiques y sont des droites. On retrouve alors la première loi de Newton qui prédit que *m* reste indéfiniment en MRU.

En présence de la masse M qui courbe l'espace-temps, la particule libre m passant au voisinage du creux peut, selon la vitesse, être déviée légèrement, ou se mettre à orbiter autour de M, ou encore tomber sur M après une trajectoire en forme de spirale. Toutes les trajectoires de *m* dans le champ de gravitation de M sont donc expliquées sans faire appel à *aucune force* ou action à distance, mais uniquement par une courbure de l'espace-temps.
Chez Einstein, les effets de la gravitation ne sont plus mécaniques mais purement géométriques.

Conséquences et vérifications

1.- La déviation des rayons lumineux (effet de lentille gravitationnelle ; croix d'Einstein – résultats actuels). Einstein avait prédit que la masse du Soleil devrait courber suffisamment l'espace-temps pour que la lumière nous provenant d'étoiles voisines du Soleil soit déviée de façon mesurable. La vérification expérimentale de la déviation relativiste des rayons lumineux fut finalement l'œuvre de Eddington en 1919 réalisée lors de l'éclipse de soleil. Les déviations étaient infimes de l'ordre de la seconde d'arc seulement mais suffisantes pour confirmer la théorie de la relativité générale.

2.- L'avance du périhélie de Mercure

$$\text{Avance séculaire } \delta = \frac{6\pi G M_{soleil} n}{c^2 r(1-e^2)}$$

où

r = distance au centre du Soleil
n = nombre de révolution de la planète pendant 100 ans
e = excentricité

3.- Le décalage des raies spectrales

Comme nous l'avons vu dans l'expérience du carrousel, une horloge accélérée retarde par rapport à une horloge qui l'est moins. Le principe d'équivalence nous permet donc de dire que le temps s'écoule d'autant plus lentement que la gravitation est importante.

Si le temps s'écoule plus lentement, les fréquences des phénomènes périodiques vont être ralenties. En particulier, les raies spectrales vont être décalées par la gravitation vers les basses fréquences, c'est-à-dire vers le rouge (redshift). **C'est ce qu'on appelle l'effet Einstein**. + Pulsar PSR
Et pour finir…

Équation d'Einstein

L'équation complète du champ gravitationnel, qu'on appelle l'**équation d'Einstein**, s'écrit :

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}}$$

où Λ est la constante cosmologique, c est la célérité de la lumière dans le vide, G est la constante gravitationnelle qui apparaît aussi dans la loi de la gravitation newtonienne, et $T\mu\nu$ le tenseur énergie-impulsion. Le tenseur symétrique $g_{\mu\nu}$ possédant 10 composantes indépendantes, l'équation tensorielle d'Einstein est équivalente à un système de 10 équations scalaires indépendantes. Ce système de 10 équations aux dérivées partielles non linéaires couplées est le plus souvent très difficile à étudier.

Série n°10: Relativité

Dilatation du temps et contraction des longueurs

1.- Un vaisseau spatial survole la Terre à la vitesse 0,8 c. Un astronaute fait tourner lentement une règle d'un mètre dans le vaisseau, de la verticale à l'horizontale. Décrivez les changements des longueurs de la règle selon le point de vue
a) d'un autre astronaute dans le vaisseau
b) d'un observateur sur Terre

2.-
a) Démontrez la formule de la contraction des longueurs, $L = L_o \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, à partir des équations de transformation de Lorentz.
b) Faites de même pour la formule de la dilatation du temps,

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

3.- Un faisceau d'un certain type de particule élémentaire voyage à la vitesse de $2{,}85 \cdot 10^8$ m/s. A cette vitesse, la durée de vie moyenne mesurée est de $2{,}5 \cdot 10^{-6}$ s.
Quelle est la durée de vie de la particule au repos ?

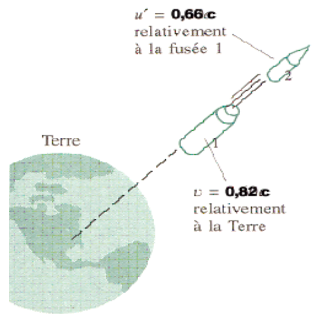
4.- Vous décidez de voyager jusqu'à une étoile située à 65 AL de distance.
A quelle vitesse devriez-vous voyager pour que cette distance ne soit que de 20 AL ?

5.- Nous sommes en 2050 et la Fédération Spatiale des Nations Unies à finalement perfectionné le stockage des antiprotons destinés à la propulsion des vaisseaux spatiaux. Les astronautes se préparent pour une mission vers le système planétaire d'Alpha du Centaure, situé à environ 4 années-lumière. Les provisions embarquées permettent un voyage d'une durée totale de 16 années.

a) Quelle vitesse le vaisseau doit-il atteindre pour que les provisions suffisent ?
On négligera la période d'accélération, de demi-tour et le temps d'exploration, car ils sont négligeables devant le temps du trajet lui-même.

b) Résoudre le problème en utilisant cette fois la contraction des longueurs.

6.- 2 fusées quittent la Terre dans des directions opposées, chacune à une vitesse de 0,5 c relativement à la Terre.
a.- Quelle est la vitesse de la fusée 1 relativement à la fusée 2 ?
b.- Quelle est la vitesse de la fusée 2 relativement à la fusée 1 ?



7.- Une fusée s'éloigne de la Terre à une vitesse de 0,66c. Un module mis à feu sur la fusée quitte celle-ci à une vitesse de 0,82c à angle droit avec la fusée (selon les observations faites de la fusée).
Quelle est la grandeur et la direction de la vitesse du module (relativement à la direction du mouvement de la fusée) selon les observateurs sur la Terre ?

8.- Un garçon de ferme étudiant la physique croit qu'il peut faire entrer une perche longue de 12m dans une grange longue de 10m s'il court assez vite (en portant la perche).
a.- Peut-il le faire ?
b.- Comment cela s'accorde-t-il avec l'idée que lorsqu'il court, la grange semble plus courte que 10 m ?

Masse, quantité de mouvement et énergie

9.- Un méson π^0 ($m_o = 2{,}4 \cdot 10^{-28}$ kg) voyage à la vitesse $v = 0{,}8c = 2{,}4 \cdot 10^8$ m/s.
a.- Quelle est son énergie cinétique ? Comparez votre résultat à celui obtenu au moyen d'un calcul classique.
b.- Quelle est la quantité d'énergie produite par la désintégration du méson π^0 en rayonnement électromagnétique ?

10.-
a.- Quelle est la vitesse d'un électron dont la masse est 10'000 fois plus grande que sa masse au repos ?
L'accélérateur de Stanford (SLAC) permet d'accélérer des électrons à de telles vitesses.
b.- Si les électrons voyagent dans le laboratoire dans un tube de 3 km de long (comme dans l'accélérateur de Stanford), quelle est la longueur de ce tube dans le système de référence des électrons ?
11.- Calculer l'énergie d'un électron au repos en Joule et en MeV

12.- Une fusée dans la masse au repos est de $2 \cdot 10^4$ kg est accélérée jusqu'à 0,25 c.
a.- Quelle est l'énergie cinétique de la fusée ?
b.- Si vous utilisiez la formule classique pour l'énergie cinétique, quel serait votre pourcentage d'erreur ?

13.- Combien de grammes de matière faudrait-il transformer complètement pour faire fonctionner une ampoule lumineuse de 100W pendant un an ?

14.- Combien d'énergie faut-il pour briser un noyau d'hélium en ses composants, soit 2 protons et 2 neutrons ? Les masses au repos d'un proton (incluant un électron), d'un neutron et de l'hélium (incluant ses 2 électrons), sont de 1,00783 u, 1,00867 u et 4,0026 u respectivement. (On appelle cette énergie l'énergie de liaison du noyau).

Exercices supplémentaires

1.- Une soucoupe volante survole la ville de Lausanne avec une vitesse constante égale à la moitié de la vitesse de la lumière. Sa trajectoire fait en sorte qu'elle survole le Stade olympique, puis, quelques instants plus tard, la Place d'Ouchy : dans le référentiel de la ville de Lausanne, il y a 6,5 km entre le Stade olympique et la Place d'Ouchy.
On désire déterminer combien de temps s'écoule entre les 2 survols d'après :

a) les habitants de la ville de Lausanne
b) les passagers de la soucoupe

2.- Un astronef dont la longueur propre est de 120 m fonce à 0,6 c vers la Terre. Les Terriens envoient un photon vers l'astronef.
a) Dans le référentiel de l'astronef, quel est le module de la vitesse du photon par rapport à l'astronef ?
b) Dans le référentiel des Terriens, quel est le module de la vitesse du photon par rapport à l'astronef ?
c) Dans le référentiel des Terriens, quelle est la longueur de l'astronef ?
d) Dans le référentiel des Terriens, combien de temps prend le photon à traverser la longueur de l'astronef ?
e) Dans le référentiel des Terriens, de combien les horloges dans l'astronef avancent-elles pendant que le photon traverse la longueur de l'astronef ?
f) Deux horloges placées aux extrémités de l'astronef sont synchronisées entre elles dans le référentiel de l'astronef : quel est leur défaut de synchronisation d'après les Terriens ?
g) Dans le référentiel de l'astronef, combien de temps prend le photon à traverser la longueur de l'astronef ?
h) En divisant la longueur propre de l'astronef par le temps obtenu en g), quelle valeur obtient-on pour le module de la vitesse du photon d'après les passagers de l'astronef ?

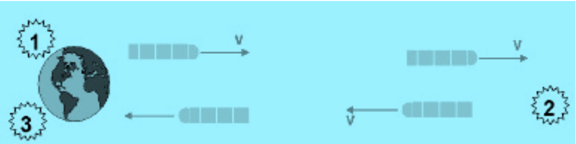
3.- Quelle doit être le module de la vitesse radiale d'une source de lumière violette (λ = 400 nm) pour qu'elle paraisse rouge (λ = 700 nm) ?

4.- Un radar de police immobile envoie un faisceau micro-ondes à 24,2 GHz vers une voiture qui se rapproche. La combinaison du signal émis et du signal reçu se traduit par une fréquence de battement de 6000 Hz.
Quel est le module de la vitesse de la voiture ?

Annexes

Le paradoxe des jumeaux (Langevin – 1911)

La situation :



Un jumeau, **M**arie (en **m**ouvement), de 30 ans s'envole dans une fusée, voyage à la vitesse de 0,8c ($\gamma = 1,\overline{6}$) jusqu'à un système stellaire situé à 8 AL de la Terre puis revient ; pendant tout ce temps, son frère jumeau **f**ixe, **F**rank reste sur Terre. Du point de vue de Frank, la durée du voyage aller est de 10 ans (8 AL / 0,8 c = 10 ans), celle du voyage retour également, ce qui donne une durée totale de 20 ans, si bien que Frank aura 30 + 10 + 10 ans = 50 ans quand Marie reviendra. Toutefois, comme l'horloge de Marie bat moins vite, son temps de trajet sera seulement de 10/γ = 6 ans. Frank calcule que d'après sa propre horloge au repos sur Terre, Marie aura 30 + 6 + 6 = 42 ans.

Le paradoxe :

Tel est le point de vue du jumeau resté sur Terre, mais quel est celui du jumeau astronaute ? Si tous les référentiels inertiels sont équivalents, le jumeau astronaute ne peut-il pas prétendre que puisque la Terre s'éloigne à grande vitesse, le temps s'y écoule plus lentement et que le jumeau resté sur Terre vieillit plus lentement ?
Ce terme de paradoxe ne se rapportait donc pas tant à l'étonnement de retrouver l'un des jumeaux plus jeune que son frère, qu'à celui de voir la théorie de la relativité, basée essentiellement sur une notion de perspective et donc de complète symétrie, conduire à un résultat dissymétrique.

Le développement :

Pour solutionner ce paradoxe, il faut se rendre compte que les jumeaux <u>ne sont pas</u> dans une situation identique :

Le jumeau resté sur Terre se trouve bel et bien dans un référentiel inertiel (ou presque, l'accélération centripète étant très faible à la surface de la Terre) durant toute la durée du voyage de Marie.
Marie, par contre, pour revenir sur Terre, a dû *changer* de direction (demi-tour) une fois arrivé à la planète éloignée changeant ainsi de référentiel (référentiel de l'aller à celui du retour).
Pendant son demi-tour, le jumeau astronaute est soumis à des forces d'inertie (force centrifuge) qui n'existent pas pour le jumeau resté sur Terre. Ainsi, la situation des 2 jumeaux est-elle physiquement dissymétrique.
Ex : Dans un train qui freine ou accélère la valise est ébranlée mais aucune secousse n'est enregistrée sur le quai de gare.
De même :

- Quand le jumeau astronaute aperçoit la Terre faire demi-tour et revenir vers lui, il ressent l'action des forces qui le déséquilibrent ;
- Quand le jumeau terrestre aperçoit la fusée du jumeau astronaute faire demi-tour, aucune force ne se manifeste autour de lui.

Si l'on considérait qu'il s'agit là de la seule différence physique décelable entre « le voyage » du jumeau astronaute et celui du jumeau terrestre, cette analyse semblerait nous autoriser à attribuer l'origine de leur différence d'âge à l'accélération. Si donc l'accélération est bien la cause de la différence de vieillissement des 2 jumeaux, un voyage 2 ou 3 fois plus long, mais dans lequel la manœuvre de retournement de la fusée reste identique devra laisser leur différence d'âge inchangée. Or, les calculs établissent qu'il n'en est rien : une durée double ou triple du voyage aller-retour, double ou triple cette différence d'âge ! Ils montrent en outre que l'effet temporel de l'accélération peut être rendu complètement négligeable devant la différence d'âge des jumeaux.
Force est de constater que l'accélération n'intervient pas ou de façon négligeable dans la différence d'âge des 2 jumeaux.
Nous nous trouvons ainsi dans la situation paradoxale suivante :

- La dissymétrie entre les situations des 2 jumeaux ne peut avoir sont origine que dans le demi-tour accéléré de la fusée
- Et pourtant, leur différence d'âge ne semble provenir que de la partie du voyage effectuée à vitesse constante.

Comment résoudre une telle énigme ?

Supposons que l'aller se fasse à vitesse constante, comme le retour, chaque moitié du voyage prenant **6 ans** et que le jumeau astronaute a changé de direction immédiatement en atteignant la planète. Chacun de ces 2 référentiels est inertiel et, pendant chaque moitié du voyage, le jumeau voyageur déduit que son frère resté sur Terre vieillit moins vite que lui, soit 0,1 an à l'aller et de 0,1 an au retour. Cependant au moment où il change de direction, le jumeau voyageur change de référentiel, passant du *référentiel de l'aller* au *référentiel du retour*.
Or, dans le référentiel du retour, le départ depuis la Terre s'est produit non pas il y a 6 ans, comme dans le référentiel de l'aller, ni il y a 10 ans comme dans le référentiel de la Terre, mais il y a … $27,\overline{3}$ **ans**!

Justification :
Distinguons donc les 3 référentiels :
- le référentiel de la Terre : R_T
- le référentiel de l'aller : R_A
- le référentiel du retour : R_R

Supposons que la vitesse de la fusée par rapport à la Terre v_{FT} est :

$$v_{FT} = v_{AT} = - v_{RT} = v_{TR}$$

La vitesse entre les référentiels R_A et R_R doit être formulée de la façon suivante (cours p.8 ou F&T p. 154) :

$$v_{AR} = \frac{v_{AT} + v_{TR}}{1 + \frac{v_{AT}v_{TR}}{c^2}} = \frac{v_{AT} + v_{AT}}{1 + \frac{v_{AT}v_{AT}}{c^2}} = \frac{2v_{AT}}{1 + \frac{v_{AT}^2}{c^2}} \qquad (1)$$

où
v_{AR} = vitesse du référentiel de l'aller par rapport au référentiel du retour (fusée au retour)
v_{AT} = vitesse du référentiel de l'aller (fusée à l'aller) par rapport au référentiel de la Terre
v_{TR} = vitesse du référentiel de la Terre par rapport au référentiel du retour (fusée au retour)

En fait, le demi-tour a un autre effet, non plus dynamique mais géométrique, beaucoup trop évident pour attirer l'attention : celui de changer la direction de la fusée. Suite au demi-tour, le jumeau astronaute change de référentiel galiléen. Le voyage du jumeau astronaute n'est pas rectiligne uniforme ; les effets temporels entre les 2 jumeaux ne sont donc plus réciproques.
Donc le temps de voyage t_A de l'aller par rapport au <u>*référentiel de retour R_R*</u> sera égal à :

$$\frac{t_A}{\sqrt{1 - \frac{v_{AR}^2}{c^2}}} = t_{AR} \qquad (2)$$

où

t_{AR} = temps relatif du voyage « aller » mesuré avec l'horloge du référentiel de retour R_R.

Nous obtenons donc : (1) + (2) :

$$\frac{t_A}{\sqrt{1 - \frac{v_{AR}^2}{c^2}}} = t_{A_R} \quad \Rightarrow \quad \frac{t_A}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{2v_{AT}}{1 + \frac{v_{AT}^2}{c^2}}\right)^2}} = t_{AR} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{t_A}{\sqrt{1 - \left(\frac{2v_{AT}c}{c^2 + v_{AT}^2}\right)^2}} = t_{AR} \Rightarrow \frac{t_A}{\sqrt{\left(1 - \frac{2v_{AT}c}{c^2 + v_{AT}^2}\right)\left(1 + \frac{2v_{AT}c}{c^2 + v_{AT}^2}\right)}} = t_{AR}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{t_A}{\sqrt{\frac{(c - v_{AT})^2 (c + v_{AT})^2}{(c^2 + v_{AT}^2)^2}}} = t_{AR} \quad \Rightarrow \quad t_A\left(\frac{c^2 + v_{AT}^2}{(c - v_{AT})(c + v_{AT})}\right) = t_{AR}$$

=> $$t_A\left(\frac{c^2+v_{AT}^2}{c^2-v_{AT}^2}\right)=t_{AR}$$

Et le temps total du voyage est égal au temps de l'horloge ressenti par le pilote de la fusée à savoir le temps d'aller t_{AR} dans le référentiel du retour, additionné au temps de retour qui est le même que le temps d'aller dans le référentiel de l'aller, soit t_A. $t_{TOT} = t_A + t_{AR} = t_A + \frac{t_A\left(c^2+v_{AT}^2\right)}{(c-v_{AT})(c+v_{AT})} =$

$$t_A\left(1+\frac{c^2+v_{AT}^2}{c^2-v_{AT}^2}\right)=t_A\left(\frac{2c^2}{c^2-v_{AT}^2}\right)=\frac{2\cdot t_A}{1-\frac{v_{AT}^2}{c^2}}=2\gamma^2 t_A \qquad (4)$$

Ex : t_A = 6 ans ; $\gamma = 1,\overline{6} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_{AT}^2}{c^2}}}$ => $t_{TOT} = 33,\overline{3}$ **ans** !

En passant dans le référentiel de retour R_R, Marie doit en effet adopter cette référence de temps ; comme il faudra encore 6 ans pour atteindre la Terre, la durée totale du voyage selon le référentiel du retour est de $33,\overline{3}$ **ans !**

Marie aimerait connaître le temps que Frank a dû attendre pour la revoir :

$$t_{TOT} = \frac{t_{terre}}{\sqrt{1-\frac{v_{TR}^2}{c^2}}} = \frac{t_{terre}}{\sqrt{1-\frac{v_{AT}^2}{c^2}}} \qquad (5)$$

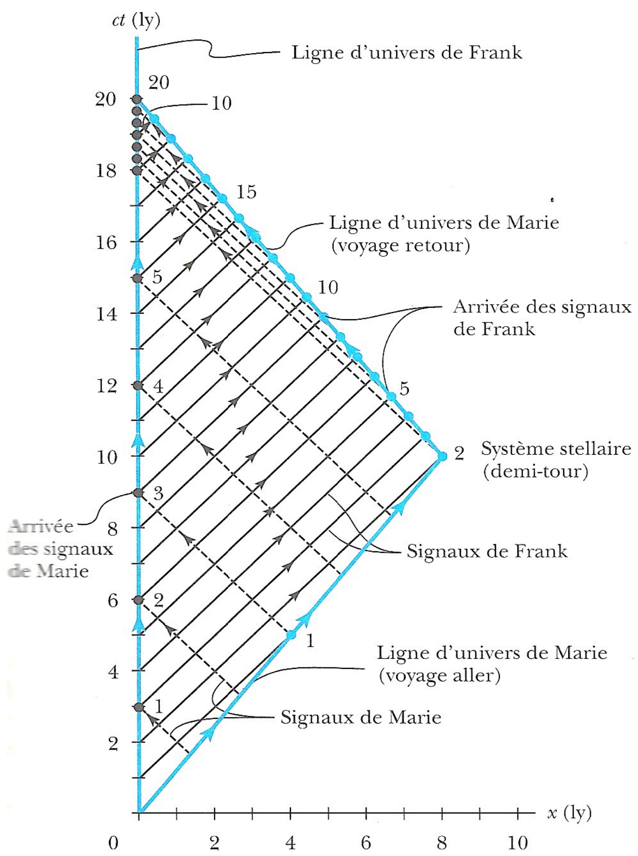
En égalisant (4) et (5) :

$$\frac{2t_A}{1-\frac{v_{AT}^2}{c^2}} = \frac{t_{terre}}{\sqrt{1-\frac{v_{AT}^2}{c^2}}} \quad => \quad \frac{2t_A}{\sqrt{1-\frac{v_{AT}^2}{c^2}}} = t_{terre}$$

Ex : t_{terre} = 20 ans

Comme le jumeau resté sur Terre se déplace par rapport à ce référentiel, Marie calcule que ces $33,\overline{3}$ ans ne lui (au jumeau terrestre) ont paru que **20 ans** et que l'âge de Franck est bien de 50 ans.

La géométrie plane nous permet d'illustrer ce qui se passe dans l'histoire des 2 jumeaux.



Pour décrire les événements en relativité, il est parfois pratique de les représenter sur des diagrammes d'espace-temps comme celui ci-dessus. Pour simplifier la figure, on n'utilise qu'une coordonnée spatiale *x* et on spécifie la position seulement dans cette direction. On utilise *ct* au lieu du temps afin que les deux coordonnées aient la dimension d'une longueur. Les diagrammes d'espace-temps ont été introduits par Minkowski (professeur d'Einstein à l'ETHZ) en 1908 et on les appelle **les diagrammes de Minkowski.** Nous avons appris en relativité qu'il faut préciser à la fois la position d'espace et de temps pour décrire un événement. C'est l'origine du terme **quatrième dimension** pour le temps. La ligne qui joint les événements A et B est le chemin spatio-temporel de A à B, on l'appelle une **ligne d'univers**.

Dans le diagramme ci-dessus, nous supposons que Marie quitte la Terre à l'origine (x,ct) = (0,0). Elle revient sur Terre en x = 0, mais à un instant ultérieur ct = 20 AL. Ses lignes d'univers sont décrites par deux segments de pente + c/v et –c/v, alors que la ligne d'univers de Frank restent à x = 0. Si l'on suppose à présent Frank et Marie envoient des signaux chaque année, quand reçoivent-ils ces signaux ?

La ligne représentant le voyage de Marie a une pente c/0,8c = 1,25 lors du voyage aller et -1,25 lors du voyage retour. Pendant le voyage aller, Marie ne reçoit pas le second signal annuel de Frank avant d'avoir atteint le système stellaire. Cela est dû au fait que le signal lumineux met un temps considérable pour rattraper Marie. Toutefois, au cours du voyage retour, Marie reçoit les signaux de Frank à un rythme rapide, captant le dernier juste au moment où elle arrive. Comme l'horloge de Marie est plus lente, nous voyons dans le diagramme d'espace-temps correspondant au référentiel au repos que les signaux sont envoyés à une fréquence moindre. Marie envoie son sixième signal annuel quand elle arrive au système stellaire. Toutefois, ce signal n'atteint Frank que la 18ème année !

Pendant les deux années suivantes, en revanche, Frank reçoit les signaux de Marie à un taux rapide, les recevant finalement tous les 12. Frank reçoit les 6 derniers signaux pendant une période de seulement deux ans.

Conclusion

Dans toute leur histoire, aucun des jumeaux n'est censé vivre plus longtemps que l'autre. Chaque jumeau mourra après avoir passé, l'un sur Terre, l'autre dans sa fusée, des années de durée égale à *leur propre montre* et à leur propre cœur. Supposons qu'ils meurent tous 2 au même âge de 80 ans. S'ils se quittent à l'âge de 30 ans en l'an 2010, et si le jumeau voyageur voyage 50 ans à sa propre horloge, il viendra mourir à son retour sur Terre à l'âge de 80 ans. Lors de son atterrissage, le calendrier terrestre indiquera peut-être l'année 2500, et le jumeau terrestre sera donc mort depuis longtemps mais une rapide enquête indiquera qu'il est mort en 2060 soit à 80 ans lui aussi : le seul effet relativiste est d'avoir décalé dans le temps 2 êtres qui ont vécu chacun une vie soumise aux lois ordinaires.

Si elle n'est pas un élixir d'immortalité, la relativité permettrait d'envisager la possibilité, pour un historien par exemple, de partir dans l'espace et de revenir étudier ce qui se passe sur Terre à intervalles réguliers, par exemple tous les 100 ans. S'il est donc théoriquement envisageable d'aller voir ce que sera la Terre dans 500 ans , il ne l'est pas de revenir ensuite à notre époque.