Chapitre n°1 : Les oscillations

Lorsqu'une onde mécanique (qui a besoin d'un milieu de propagation pour exister) se déplace dans un milieu (vagues à la surface de l'eau, ondes sonores, ondes sur les cordes tendues d'un instrument de musique), les particules qui constituent ce dernier subissent un mouvement d'oscillation : leur position varie de manière périodique autour d'une position centrale. Ainsi, avant d'aborder la physique des ondes, nous allons étudier les oscillations.

Nous allons tout d'abord nous intéresser au mouvement d'oscillation le plus simple, pour lequel la position en fonction du temps peut être décrite par une fonction sinusoïdale : il s'agit du **mouvement harmonique simple** (MHS).

Les premières observations quantitatives portant sur les oscillations ont probablement été faites par Galilée. Pour allumer les chandeliers de la cathédrale de Pise, on devait les tirer vers une galerie. Lorsqu'on les lâchait, ils oscillaient pendant un certain temps. Un jour, lorsqu'il était étudiant, Galilée mesura la durée des oscillations en utilisant les battements de son cœur et constata avec surprise que la durée des oscillations ne variait pas, même si leur amplitude diminuait.

Cette propriété **d'isochronisme** fut à la base des premières horloges à pendule. Pour étudier l'oscillation d'un pendule, on peut définir un axe x courbe qui suit la trajectoire de la bille et dont l'origine correspond au point le plus bas de l'oscillation. La position de la bille en fonction du temps ne correspond pas tout à fait à une fonction sinusoïdale. Toutefois, lorsque l'angle maximal entre la corde et la verticale ne dépasse pas 15°, une fonction sinusoïdale peut être utilisée pour obtenir une très bonne approximation du mouvement : nous en expliquerons la raison dans le paragraphe sur les pendules.

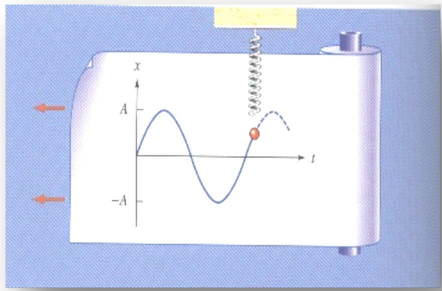
Tout d'abord, quelques définitions :

La période T [s] : Le temps mis par un système pour accomplir un cycle.
La fréquence f [Hertz] : Le nombre de cycles par unité de temps. Il s'agit de l'inverse de la période :

$$f = 1/T \qquad (1)$$

La vitesse angulaire ω [rad/s] : Le nombre de radian balayé par seconde dans un mouvement circulaire. Si un objet décrit une trajectoire circulaire avec une vitesse constante, cet objet tourne de 2π à chaque tour et comme la fréquence f donne le nombre de tour / s alors :

$$\omega = 2\pi f = 2\pi / T \qquad (2)$$



On peut étudier les oscillations à l'aide **d'un système bloc-ressort**, un montage simple constitué d'un bloc attaché à un ressort. Pour voir comment la position x évolue dans le temps par rapport à sa valeur d'équilibre, on peut enregistrer le mouvement sur une bande de papier qui se déplace à vitesse constante. On obtient une courbe de forme sinusoïdale. En l'absence de frottement, le bloc oscille entre les valeurs extrêmes $x = +A$ et $x = -A$, où A désigne l'amplitude de l'oscillation. La position d'équilibre correspond à $x = 0$. Comme on peut l'observer sur la figure ci-dessus, la position à partir de l'équilibre ou <u>élongation</u> est donnée par :

$$x(t) = A\sin(\omega t) \qquad (3)$$

où

ω = ***fréquence angulaire*** ou **pulsation** = CONSTANTE
ωt = phase de l'oscillation en **radian** (argument du sinus)

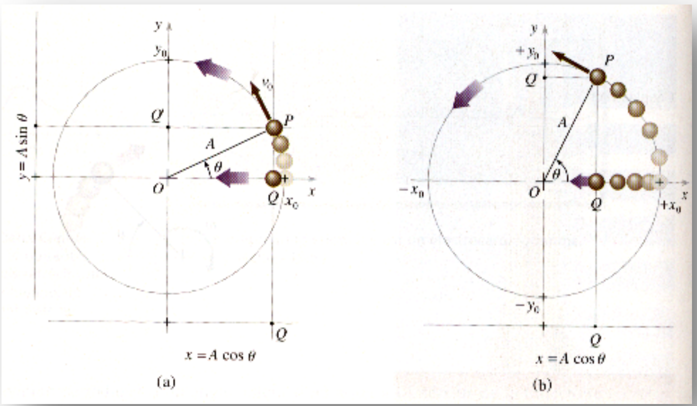
Nous remarquons que lorsque la phase :

a) $\omega t = 0 \Rightarrow x = 0$
b) $\omega t = \pi/2 \Rightarrow x = A$
c) $\omega t = 2\pi \Rightarrow x = A \sin(2\pi) = 0$

Une période T après t = 0s, lorsque t = T , la phase ωt est égale à 2π :
Nous retrouvons la propriété mentionnée plus haut concernant la vitesse angulaire pour le mouvement circulaire à savoir :

$$T = 2\pi / \omega \quad ou \quad \omega = 2\pi / T$$

Ce mouvement est donc <u>similaire</u> au mouvement d'un objet qui décrit un cercle de rayon A avec une *vitesse angulaire* ω constante. A tout instant, la position de l'objet est définie par l'angle $\theta = \omega t$. La vitesse angulaire du mouvement de rotation est égale à la fréquence angulaire du mouvement harmonique simple ou MHS (Ex : [scie sauteuse)](scie sauteuse)



La position $x(t)$ (le point Q sur la figure ci-dessus) est alors **la projection du point P** sur l'axe des x. Ce point oscille entre les positions $+A$ et $-A$.
Cette projection s'écrit :

$$x(t) = A\cos\theta = A\cos(\omega t) = A\cos(2\pi f t) \qquad (4)$$

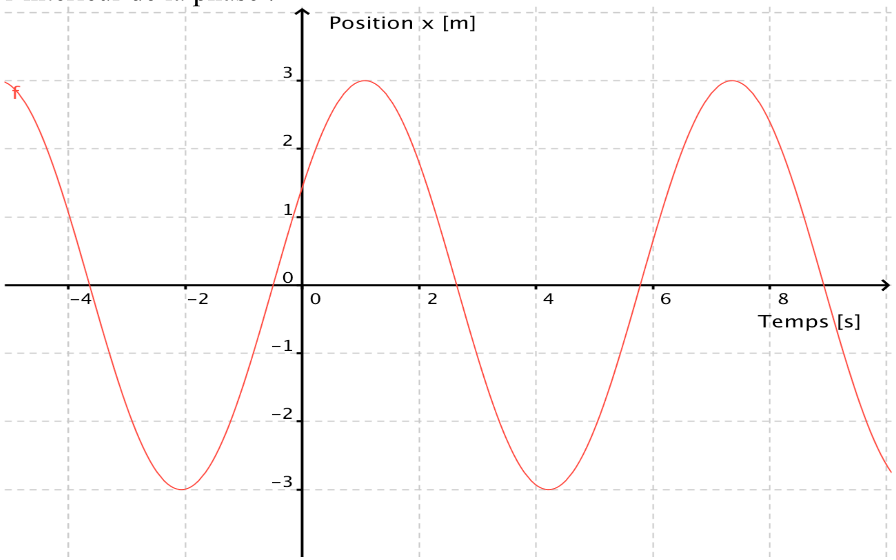
De même, la position $y(t)$ est caractérisée par :

$$y(t) = A\sin\theta = A\sin(\omega t) = A\sin(2\pi f t) \qquad (5)$$

où

A = amplitude des oscillations

Sur la figure en *page 1*, le bloc est en x = 0 à t = 0. Comment décrire le mouvement lorsque ce n'est pas le cas ?
Par exemple dans le schéma ci-dessous, à t = 0s, l'objet est à mi-chemin entre x = 0 et x = A sa position positive maximale, et il se déplace dans le sens positif de l'axe x. Quelle est la fonction qui décrit ce mouvement ?
………………………………………………………………….
La solution est d'introduire une constante de phase ϕ ou déphasage à l'intérieur de la phase :



$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi) \qquad (6)$$

où

$\omega t + \phi$ = phase [rad]
ϕ = constante de phase ou déphasage [rad]

Un système quelconque dans lequel la variation d'une grandeur physique en fonction du temps est donnée par l'équation (6) est appelé ***oscillateur harmonique simple***.

L'oscillateur harmonique simple a les propriétés suivantes :
1.- L'amplitude A est constante (l'oscillation est simple)
2.- La fréquence f et la période T sont indépendantes de l'amplitude : les grandes oscillations ont la même période que les petites oscillations (isochronisme)
3.- La dépendance en fonction du temps de la grandeur qui fluctue peut s'exprimer par une fonction sinusoïdale de fréquence unique (l'oscillation est harmonique en référence aux harmoniques en musique).
4.- Les conditions initiales sont les suivantes :
En $t = 0$: $x(t=0) = A \sin \phi$ (7)
En $x = 0$: $\sin(\omega t + \phi) = 0 \Leftrightarrow \omega t = -\phi \Leftrightarrow t = -\phi/\omega$ (8)

5.- La vitesse s'obtient en dérivant l'expression (6) par rapport au temps :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \phi) \qquad (9)$$

6.- L'accélération a s'obtient en dérivant 2 fois l'expression (6) par rapport au temps :

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \phi) = -\omega^2 x(t) \qquad (10)$$

L'accélération d'un oscillateur harmonique est proportionnelle et de sens opposé à sa position. Elle est maximale aux bornes de son mouvement en $x = \pm A$ où la vitesse est nulle.

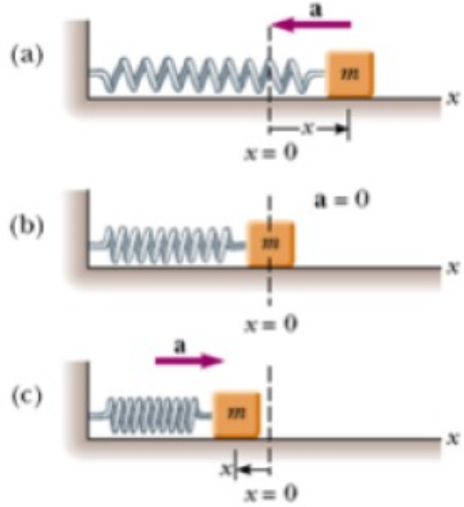
L'équation (10) peut également s'écrire :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0 \qquad (11)$$

Cette forme ***d'équation différentielle*** du 2ème degré caractérise tous les types d'oscillations harmoniques simples, qu'elles soient mécaniques ou non (oscillations dans un circuit électrique, oscillation du champ électrique et magnétique dans les ondes lumineuses comme nous le verrons dans le chapitre des ondes). L'équation (6) est une solution de cette équation différentielle.

Le système bloc-ressort

Nous allons faire l'étude dynamique de l'oscillation d'un bloc à l'extrémité d'un ressort de masse négligeable. Le système le plus simple à analyser consiste en un bloc accroché à un ressort oscillant à l'horizontale sur une surface sans frottement. On suppose que la force résultante agissant sur le bloc est la force exercée par le ressort, qui est donnée par la loi de Hooke (forme scalaire) :



$$F_{res} = -k\,x \qquad (12)$$

où

x = position par rapport à l'équilibre [m]
k = constante d'élasticité du ressort [N/m] ou raideur

Si $x > 0$, $F < 0$: la force a toujours tendance à ramener le bloc vers sa position d'équilibre, $x = 0$. La 2ème loi de Newton appliquée au bloc donne :

$$-k\,x = ma \qquad (13)$$

or

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad (14)$$

donc

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0 \qquad (15)$$

En comparant (15) et (11), on constate que le système bloc-ressort effectue un mouvement harmonique simple de pulsation (fréquence angulaire) :

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (16)$$

et de période :

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (17)$$

Nous pouvons remarquer que la période T est indépendante de l'amplitude.

Exemple :
Montre qu'un bloc suspendu à un ressort vertical (soumis à la gravitation) effectue un mouvement harmonique simple (l'accélération est directement proportionnelle et de sens opposé à la position par rapport à l'équilibre). Au préalable, il nous faut définir un axe vertical dont l'origine correspond au centre de l'oscillation, c'est-à-dire l'endroit où le bloc peut demeurer en équilibre statique.

L'énergie dans un mouvement harmonique simple

La force exercée par un ressort idéal est conservative, ce qui signifie qu'en l'absence de frottement l'énergie mécanique est conservée.
L'énergie potentielle vaut :

$$E_{pot}=\int F(x)dx=\int(-kx)dx=½\,k\,x^2 \qquad (18)$$

Et par (6),

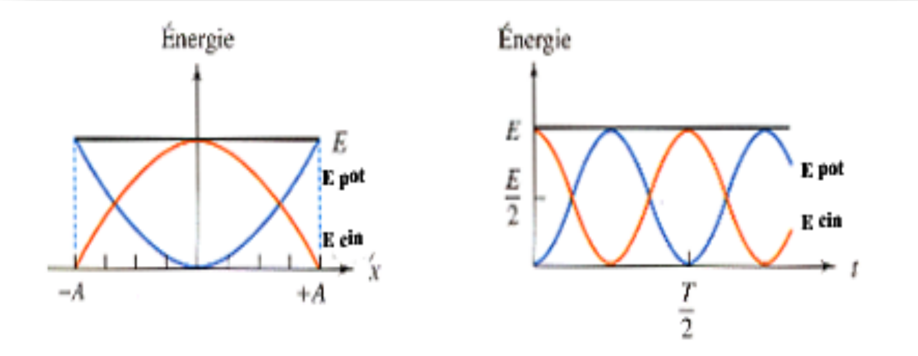
$$E_{pot}=½\,k\,A^2\sin^2(\omega t+\phi) \qquad (19)$$

L'énergie cinétique d'après (9) vaut :

$$E_{cin}=½\,mv^2=½\,m\,\omega^2A^2\cos^2(\omega t+\phi) \qquad (20)$$

Nous obtenons finalement :

$$E_{méc}=½\,mv^2+½\,k\,x^2=½\,k\,A^2 \qquad (21)$$



L'énergie mécanique d'un oscillateur harmonique simple est constante et proportionnelle au carré de l'amplitude.

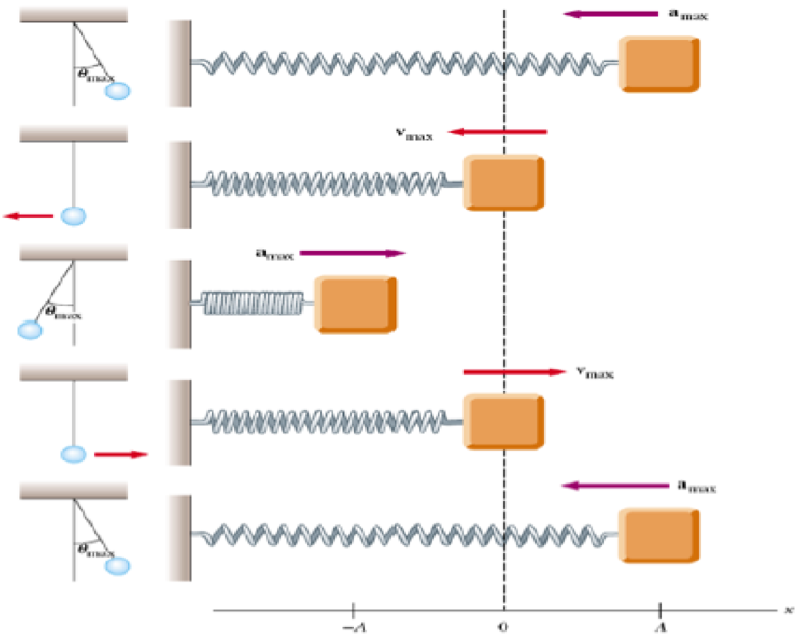
En $x = \pm A$: $E_{cin} = 0$ *et* $E_{mec} = E_{pot}$ (22)

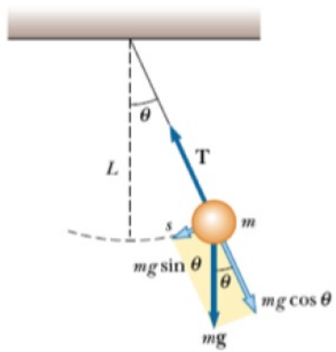
En $x = 0$: $E_{pot} = 0$ *et* $E_{mec} = E_{cin}$ (23)

On peut donc dire que le bloc est dans *un puits de potentiel* créé par le ressort. Tout mouvement harmonique simple est caractérisé par un puits de potentiel parabolique. Autrement dit, l'énergie potentielle est proportionnelle au carré de la position.

Exemple :
Montrer que l'équation différentielle du mouvement harmonique simple peut être obtenue à partir de l'expression donnant l'énergie du système.

Les pendules





Le pendule simple (ex . grutier)

Un pendule simple est un système composé d'une masse ponctuelle m suspendue à l'extrémité d'un fil de masse négligeable et de longueur L. La distance parcourue sur l'arc à partir du point le plus bas (s sur le schéma) est $x = L\theta$, θ étant l'angle en radian par rapport à la verticale. La composante tangentielle de la force résultante sur la masse est la composante tangentielle du poids.

Selon la 2ème loi de Newton, nous pouvons écrire :

$$F = - mg \sin\theta = ma = m\,\frac{d^2x}{dt^2} \qquad (24)$$

Le signe négatif vient du fait que la composante du poids agit comme une force de rappel.
Pour des valeurs petites de θ *(< 20°)* :

$$\sin\theta = \theta = x/L \qquad (25)$$

(24) devient :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0 \qquad (26)$$

En comparant (26) avec (11) (mouvement harmonique simple), on voit que, dans l'approximation des petits angles (≤ 15°), un pendule simple effectue un mouvement harmonique simple de fréquence angulaire :

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \qquad (27)$$

et de période T :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad (28)$$

La période ne dépend ni de la masse, ni de l'amplitude.
La solution de l'équation (26) est donnée par :

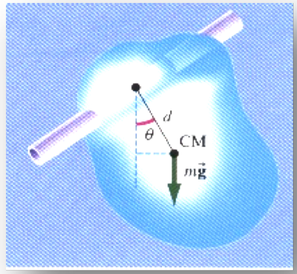
$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t + \phi) \qquad (29)$$

où

θ_0 = amplitude angulaire

ϕ = constante de phase (dépend des conditions initiales)

Le pendule physique ou composé



Le pendule composé, au contraire du pendule simple, est un corps rigide (bras, jambe, sphère,…) en rotation autour d'un axe ne passant pas par son CM.
Si d est la distance du pivot au CM, le moment de force de rappel qu'engendre le poids est – $mgd\sin\theta$ (vers les valeurs décroissantes de θ). Comme l'objet a un moment d'inertie I (notion que nous verrons plus tard dans le cours de mécanique de rotation), l'équation (24) représentant la 2ème loi de Newton s'écrit en rotation ($\sum M = I\,\alpha$):

$$M = - mg\,d \sin\theta = I\,\frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad (30)$$

En prenant l'approximation des petits angles, $\sin\theta \sim \theta$, alors :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgd}{I}\theta = 0 \qquad (31)$$

qui est l'équation du mouvement harmonique simple. En comparant avec (27), nous obtenons :

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}} \qquad (32)$$

et

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \quad \text{INDEPENDANT de la masse} \qquad (33)$$

Dans la pratique, si l'on connaît la position du CM et la valeur de d, une mesure de T permet de déterminer le moment d'inertie du corps (ex: gyroscope)

Le pendule de torsion

Considérons un corps comme un disque ou une tige, suspendu à l'extrémité d'un fil.
Lorsqu'on tord d'un angle θ l'extrémité du fil, le moment de force de rappel *M* obéit à la loi de Hooke :

$$M = - C\theta \tag{34}$$

où

C = constante de torsion

Si on lâche le fil après l'avoir tordu, le système oscillant est appelé pendule de torsion.
La 2ème loi de Newton en rotation donne :

$$\sum M = I\,\alpha \tag{35}$$

c'est-à-dire

$$- C\,\theta = I\,\frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{36}$$

qui peut s'écrire sous la forme

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{C}{I}\theta = 0 \tag{37}$$

Cette équation est celle d'un mouvement harmonique simple de pulsation

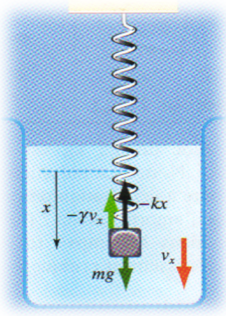
$$\omega = \sqrt{\frac{C}{I}} \tag{38}$$

et de période

$$\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}} \tag{39}$$

Exemple : balancier relié au ressort spiral d'une montre, Cavendish

Oscillations amorties



Nous avons jusqu'à présent négligé les pertes d'énergie qui sont inévitables : frottement visqueux dû à l'air par exemple. L'énergie et par conséquent l'amplitude d'un tel oscillateur amorti diminuent avec le temps.
Pour établir l'équation des oscillations amorties, considérons le cas décrit ci-dessous qui représente un bloc immergé dans un liquide. Lorsque la vitesse est faible, l'amortissement est dû à une force de résistance $\vec{F}$ qui est proportionnelle à la vitesse :

$$\vec{F} = -\gamma\vec{v} \tag{40}$$

où

γ = constante d'amortissement

Si l'on néglige la poussée du fluide, la 2ème loi de Newton appliquée au bloc s'écrit :

$$\sum F_x = -kx - \gamma\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} \tag{41}$$

Cette équation peut s'écrire sous la forme :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + kx = 0 \tag{42}$$

On peut vérifier qu'une des solutions de l'équation est :

$$x = A_0 e^{-\gamma t/2m}\sin(\omega' t + \phi) \tag{43}$$

où

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \quad \textit{pulsation amortie} \tag{44}$$

Vérification :

Cas A

Pour que ω' soit un nombre réel, la condition :

$$\gamma/2m < \omega_0 \qquad (\lambda < \omega_0) \qquad (45)$$

doit être satisfaite.
Le cas échéant, **les oscillations sont sous-amorties**.
En posant $\phi = 0$, l'amplitude diminue selon :

$$A(t) = A_0 e^{-(\gamma/2m)t} = A_0 e^{-\lambda t} \qquad (46)$$

Nous pouvons également définir **le temps de relaxation** $\boldsymbol{\tau}$:

$$\tau = 2m/\gamma = 1/\lambda$$

Après un temps τ, l'amplitude de l'oscillation a diminué de 63% (e^{-1} = 37%).

Cas B

Que se passe-t-il lorsque la condition (45) n'est pas remplie autrement dit lorsque $\gamma/2m > \omega_0$ ($\lambda > \omega_0$)?
Dans ce cas, ω' est un nombre imaginaire. Dans ce cas, il n'y a pas d'oscillation et le système revient lentement à sa position d'équilibre. Les portes montées sur des charnières à fermeture automatique et le dispositif de rappel du bras d'un tourne-disque sont des exemples **d'amortissement surcritique**.

Cas C

Dans le cas où $\gamma/2m = \omega_0$ ou $1/\tau = \omega_0$, on a $\omega' = 0$ et, là non plus, il n'y a pas d'oscillation. Cette condition d'amortissement critique correspond au temps le plus court pour que le système revienne à l'équilibre. **L'amortissement critique** est utilisé dans les mouvements des appareils de mesure électriques pour amortir les oscillations de l'aiguille. Le système de suspension d'une automobile est réglé de manière à avoir un amortissement un peu moins que critique. Dans ce cas, la voiture revient rapidement à sa position d'équilibre sans faire plusieurs oscillations autour de sa position d'équilibre.

Oscillations forcées et résonance

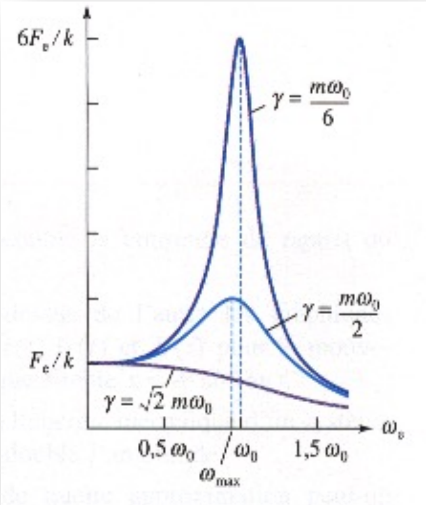
La perte d'énergie dans un oscillateur amorti peut être compensée par le travail effectué par un agent extérieur. Par exemple, on peut entretenir le mouvement d'un enfant sur une balançoire en le poussant à des moments appropriés. Dans bien des cas, la force d'entraînement extérieure varie de façon sinusoïdale ω_e. Supposons que $F(t) = F_e \cos \omega_e t$.
La 2ème loi de Newton appliquée à un tel oscillateur forcé avec frottement nous fournit l'équation suivante (42):

$$\sum F_x = -kx - \gamma \frac{dx}{dt} + F_e \cos(\omega_e t) = m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad (47)$$

L'équation s'écrit alors :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + kx = F_e \cos \omega_e t \qquad (48)$$

Lorsqu'on applique la force, le mouvement est tout d'abord complexe : la solution de l'équation différentielle comporte des termes qualifiés de transitoires. Toutefois, le système finit par osciller en régime permanent.



Le régime transitoire caractérise le mouvement de l'oscillateur quand l'action forçante vient d'être enclenchée ou déclenchée. La durée de ce régime transitoire est de l'ordre d'un temps τ relié au coefficient γ qui caractérise le frottement ($\tau = 2m/\gamma$).

En régime permanent, obtenu après un temps supérieur à τ, le mouvement de l'oscillateur est alors oscillateur harmonique et sa pulsation ω est dictée par celle d'oscillateur forçant. La puissance moyenne fournie au système par la force externe est exactement compensée par la puissance moyenne dissipée par la force d'amortissement.

La caractéristique la plus importante du régime permanent est mise en évidence dans la figure ci-dessus.

La solution en régime permanent de l'équation (48) est :

$$x = A \cos(\omega_e t + \delta) \qquad (49)$$

où

δ = angle de phase entre la position x et la force extérieure F.

L'amplitude A s'obtient en insérant (49) dans (48) :

$$A = \frac{F_e/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + (\gamma\omega_e/m)^2}} \qquad (50)$$

Chaque valeur de la pulsation ω_0 de la force d'entraînement est caractérisée par sa propre amplitude (voir figure ci-dessus).

Cas :

1.- $\omega_e = 0$: A représente simplement l'allongement statique $F_e/m\omega_0^2 = F_e/k$.

2.- $\omega_e \rightarrow \omega_0$: A croît jusqu'à atteindre un maximum à ω_{max} ; Lorsque les forces d'amortissement sont *relativement faibles*, la fréquence de résonance est voisine de la fréquence naturelle d'oscillation du système.

Les caractéristiques les plus importantes d'une résonance se retrouvent dans tous les domaines de la physique classique comme dans ceux de la physique quantique.

La réponse d'un système oscillant soumis à une perturbation extérieure sinusoïdale est d'autant plus importante que la fréquence excitante ω_e se rapproche d'une fréquence propre ω_0 du système. Il y a résonance au maximum du pic qui s'observe lorsque $\omega_e = \omega_0$.

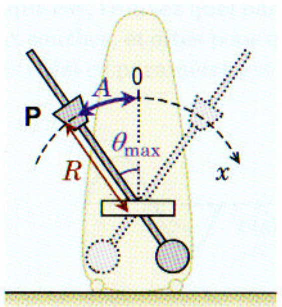
A cet instant, la force extérieure et la vitesse de la particule sont pratiquement en phase. Le transfert de puissance $P = \vec{F} \bullet \vec{v}$ à l'oscillateur est alors maximal.

Série n°1: Oscillation, mouvement harmonique

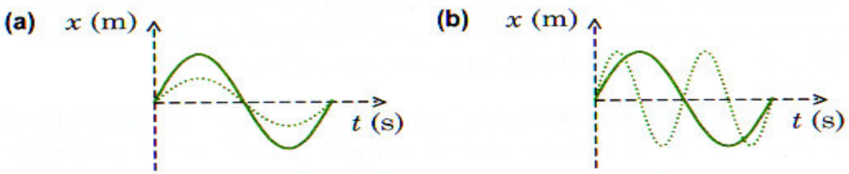
<u>Oscillation et MHS</u>

1.- Un métronome produit un clic chaque fois que la tige atteint une des extrémités de son oscillation : en réglant la position du poids P, on peut ajuster la fréquence des clics. Sachant que le métronome produit 120 clics par minute et que l'inclinaison maximale de la tige par rapport à la verticale est de 35°, on désire déterminer le module de la vitesse du poids P, situé à 10 cm du pivot, lorsque la tige passe par la verticale.

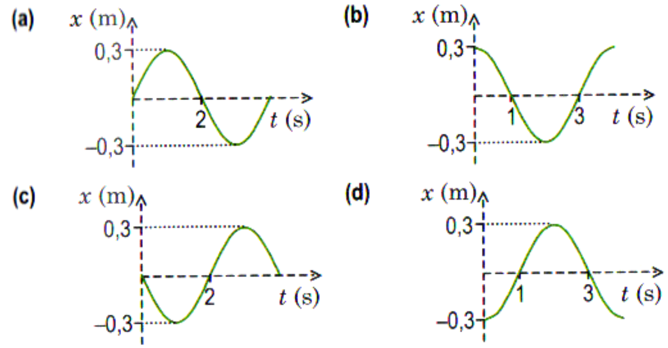
Indication : on suppose que le poids P effectue un MHS le long de l'axe courbe qui suit sa trajectoire.



2.- Sur chacun des schémas, on a représenté 2 mouvements harmoniques simples. Dans chaque cas, trouvez quel paramètre du MHS diffère entre les 2 courbes, et dites pour quelle courbe (en trait plein ou en pointillés) ce paramètre est plus grand.



3.- Pour chacun des graphiques, écrivez l'équation du MHS sous la forme $x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$ avec x en mètres, t en secondes, $A > 0$, $\omega > 0$ et $0 \leq \phi \leq 2\pi$ rad.



4.- A t = 0, un bloc qui oscille à l'extrémité d'un ressort passe à sa position positive maximale. A t = 2s, il passe pour la première fois à la position centrale de l'oscillation. Déterminez
a) la période
b) la fréquence
c) la fréquence angulaire

5.- La position d'un objet en fonction du temps est

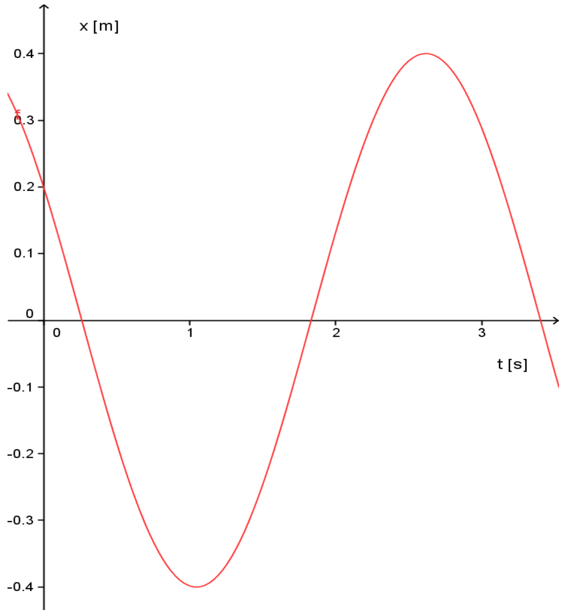
$$x = 0{,}4 \sin(1{,}2t + \pi/2)$$

Tracez le graphique x(t) pour $0 \leq t \leq 10$ s en indiquant la valeur de t chaque fois que la courbe coupe l'axe t.

6.- La position en fonction du temps d'un objet est donnée par :

$$x = A \sin(\omega t + \phi)$$

avec A = 0,4 m et ω = 2 rad/s. A t = 0, l'objet est situé en x = 0,2 m et il se déplace dans le sens négatif de l'axe x. On désire déterminer la valeur de ϕ ($0 \leq \phi \leq 2\pi$ rad).



7.- Par une journée de grand vent, un gratte-ciel de 400 m de hauteur oscille de manière appréciable. Un accéléromètre placé en haut de la tour indique que le module de l'accélération causée par l'oscillation atteint une valeur maximale de 0,345 m/s^2 à intervalles réguliers de 5,94 s.
Déterminez
a) L'amplitude de l'oscillation du sommet de la tour
b) L'angle d'inclinaison de la tour par rapport à la verticale aux extrémités de l'oscillation, en supposant de manière irréaliste qu'elle oscille sans plier (c'est-à-dire qu'elle demeure rectiligne de sa base à son sommet).

8.- Un haut-parleur est branché à un générateur de fonctions qui l'alimente avec un signal sinusoïdal. Le centre du haut-parleur oscille selon un MHS avec une vitesse maximale de 6 cm/s et une accélération maximale de 360 m/s^2.
a) Quelle est l'amplitude de l'oscillation du centre du haut-parleur ?
b) Quelle est la fréquence du son émis par le haut-parleur ?

9.- Une navette spatiale en orbite est en chute libre : la gravité apparente à l'intérieur de la navette est nulle. Par conséquent, les balances ordinaires sont inopérantes. Pour suivre l'évolution de leur masse pendant la mission, les astronautes s'assoient dans un dispositif qui contient un ressort dont la constante de rappel est connue, se donnent une poussée, se laissant osciller et mesurent la période naturelle d'oscillation. Assise dans un dispositif dont la constante de rappel est de 500 N/m, un astronaute prend 2,31 s pour effectuer une oscillation complète : on désire déterminer sa masse, sachant que le dispositif lui-même a une masse de 10 kg.

10.- Un bloc de 2 kg est attaché à un ressort pour lequel k = 200 *N/m*. On l'allonge de 5 cm et on le lâche à $t = 0$.
Trouve :
a) la position en fonction du temps
b) la vitesse lorsque $x = +A/2$
c) l'accélération lorsque $x = +A/2$
d) Quelle est la force sur le bloc pour $t = \pi/15\ s$

11.- Si $x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$ décrit la position d'un oscillateur harmonique de période T, montre que :

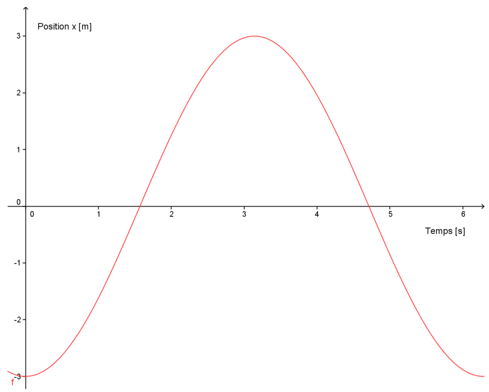
$$\omega_0 = 2\pi/T$$

12.- Un oscillateur formé d'un ressort de constante k et d'une masse m oscille sans amortissement, horizontalement. Sa fréquence est de 1,2 Hz. Si on ajoute 50 g à la masse oscillante, la fréquence 0,9 Hz.
Calcule m et k dans l'approximation harmonique.

13.- Une particule en mouvement harmonique simple passe à $x = 0$ une fois par seconde. A $t = 0$, $x = 0$ et sa vitesse est négative. La distance totale parcourue en un cycle complet est de *60 cm*.
Quelle est la position $x(t)$ de cette particule ?

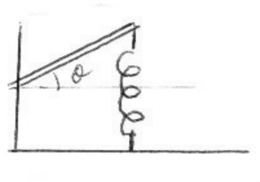
Energie du MHS

14.-



Un système bloc-ressort horizontal oscille selon un MHS : la position du bloc en fonction du temps est représentée sur le schéma ci-contre. Trace qualitativement, l'un en-dessous de l'autre, les graphiques de l'énergie cinétique du bloc, de l'énergie potentielle du ressort, et de l'énergie mécanique du système en fonction du temps.

15.- Une tige homogène de masse M et de longueur l pivote autour d'un axe situé à l'extrémité de la tige. Cette tige a son autre extrémité fixée à un ressort de constante k. Montre que pour de petites perturbations par rapport à la position d'équilibre stable (position horizontale), le mouvement est harmonique et calcule sa période.



16.-Un oscillateur est constitué d'un ressort et d'une masse. L'amplitude est de 20 cm.
Quelle est la position de la masse (par rapport à la position d'équilibre stable) :
a.- lorsque la vitesse est à la moitié de sa valeur maximale <u>positive</u>
b.- lorsque l'énergie cinétique et potentielle sont égales.

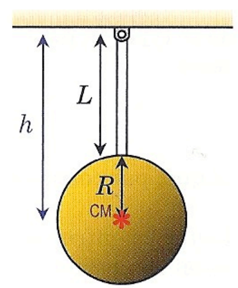
17.- L'énergie mécanique d'un oscillateur de type « ressort » est de 0,18 J. Son amplitude est de 14 cm et sa vitesse maximale de 1,25 m/s. Trouve :
a.- la masse m qui oscille
b.- la constante de rappel k
c.- la fréquence υ
d.- la vitesse si x = 7 cm (origine à l'équilibre stable)

18.- Une pièce de monnaie est posée sur un piston qui effectue un mouvement harmonique simple vertical d'amplitude égale à 10 cm.
A quelle fréquence minimale la pièce cesse-t-elle d'être en contact avec le piston ?

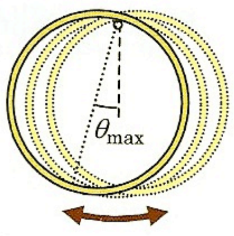
Pendules :

19.- Une règle de 1m de long, de masse m, pivote autour d'un point situé à une distance d du centre de masse de la règle avec une fréquence de 0,44 Hz.
Calcule d.

20.- Une sphère pleine de 10 cm de rayon est fixée au bout d'une tige dont la masse est négligeable et dont la longueur est de 20 cm. On fixe l'autre bout de la tige à un pivot et on désire déterminer la période de l'oscillation.

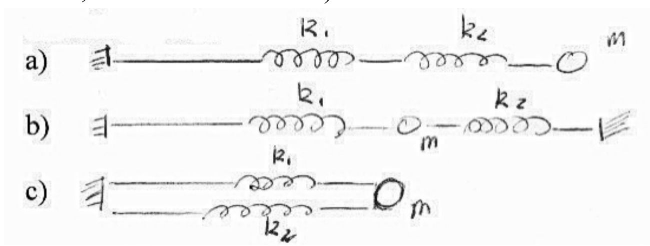


21.- Béatrice suspend un cerceau de 45 cm de rayon au bout de son doigt et lui donne une poussée afin de le faire osciller selon son plan. La masse du cerceau est de 0,6 kg et son inclinaison maximale par rapport à sa position d'équilibre (θ_{max}) est de 10°.
a.- Quel est le moment d'inertie du cerceau par rapport à l'axe passant par le doigt de Béatrice ?
b.- Quelle est la période de l'oscillation ?
c.- Quel est le module maximal de la vitesse du point du cerceau le plus éloigné du doigt de Béatrice ?

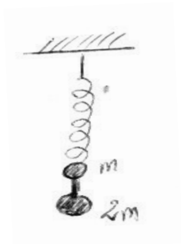


Exercices supplémentaires

22.- Détermine la période des oscillateurs harmoniques suivants (horizontaux, sans amortissement) :



23.-
2 masses *m* et *2m* sont liées par un fil qui se casse si la tension atteint une valeur *T*. On soulève la masse *m* jusqu'au point où le ressort est détendu, puis on la lâche.
a.- Trouve la relation entre la tension *T* du fil et la force de rappel *F* du ressort au cours du temps.

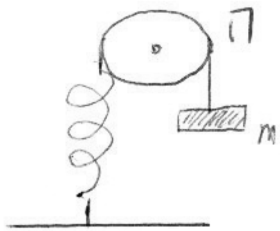


b.- Quelle doit être la valeur de *T* pour que les 2 masses atteignent (sans que le fil casse) la position où l'élongation du ressort est maximale ?

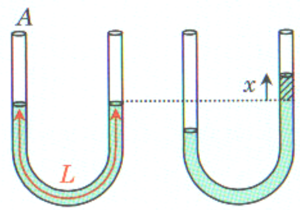
24.- Un cube de glace (H_2O) flotte sur la surface d'un bocal d'eau. Désignons par *S* la surface du cube, par *b* sa hauteur et par *a* la hauteur immergée. On enfonce le cube de glace dans le liquide (jusqu'à la moitié de la partie précédemment émergée) et on le lâche.
Calcule la période du mouvement.

25.- Une masse m est attachée à un ressort vertical de constante *k* par un fil passant sur une poulie de masse *M* et de rayon *R*. Le fil ne glisse pas sur la poulie.
Montre que la pulsation des oscillations est :

$$\omega_0^2 = \frac{2k}{M + 2m}$$



26.- Un tube en U est rempli d'eau sur une longueur *l* (les extrémités ne sont pas fermées). On fait subir à l'eau un léger déplacement, puis on laisse le système osciller.
Montre qu'il s'agit d'un oscillateur harmonique simple et calcule sa période.



27.-Un bloc de 0,5 kg oscille au bout d'un ressort dont la constante de rappel est de 5 N/m. A t = 0, l'amplitude de l'oscillation est de 10 cm ; 8s plus tard, l'amplitude n'est plus que de 3 cm. (La force d'amortissement est proportionnelle à la vitesse du bloc). Le mouvement d'oscillation cesse d'être perceptible lorsque l'amplitude devient inférieure à 1 mm : on désire déterminer à quel instant t cela se produit et combien d'oscillations complètes le bloc effectue entre t = 0 et ce instant.

Exemples :

Sirius A - Sirius B (naîne blanche) : T = 50 ans;
SN 1054 : T = 33,4033474094 ms;
SgrA* : T = 15,6 ans autour de 3,6 Msol.
Circuit RLC ; Circuit RLC forcé ; circuit RLC transfert et filtre ;
Belousov-Zhabotinsky ;
Pendule de Foucault